6. Sobre Teoría de la Medida

6.1. Convergencia débil en $L^p(X,\Sigma,\mu)$, donde (X,Σ,μ) es un espacio de medida $\sigma-$ finita y $1 \leq p < \infty$. Continuidad de la aplicación $f \to |f|^p$.

Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida $\sigma-$ finita, $1 \leq p < \infty$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $L^p(X,\Sigma,\mu)$.

(i) Si $p>1$, $f_n \underset{\rightarrow}{w} 0$ si y solo si $\int_E f_n \, d\mu \to 0$ para todo $E \in \Sigma$ de medida finita y el número $S = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p$ es finito.

(ii) Si $p=1$, $f_n \underset{\rightarrow}{w} 0$ si y solo si $\int_E f_n \, d\mu \to 0$ para todo $E \in \Sigma$ y el número $S = \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_1$ es finito.

(iii) Para $0 < p < +\infty$ la aplicación $L^p(X,\Sigma,\mu) \to L^1(X,\Sigma,\mu)$, $f \to |f|^p$, es continua.

Solución

(i) La condición es necesaria por el princípio de acotación uniforme y porque para cada entero positivo n resulta $\left|\int_E f_n \, d\mu\right| \leq \|f_n\|_p \; \mu(E)^{1/q}$ cuando E es un subconjunto medible de medida finita. Recíprocamente, si $\varepsilon > 0$ y $g \in L^q(X,\Sigma,\mu)$, $\varepsilon > 0$ por continuidad uniforme

$$\exists\delta,\ \delta>0,\ tal\ que \int_E |g|^q \ d\mu < \varepsilon^q \ si\ E \in \Sigma\ y\ \mu(E) < \delta. \tag{160}$$

Además

$$\exists M,\ M>0\ tal\ que\ \mu(\{|g|>M\}) < \delta. \tag{161}$$

Por otra parte, si $(X_k)_{k\geq 1}$ es una partición numerable disjunta medible de X con conjuntos de medida finita

$$\exists K,\ K \in \mathbb{N},\ tal\ que\ si\ E = \cup_{k=1}^K X_k\ entonces \int_{X-E} |g|^q < \varepsilon^q. \tag{162}$$

También existe una función simple s soportada en

$$F = \{x \in E :\ |g(x)| \leq M\}$$

tal que $|s-g| \leq \varepsilon$ uniformemente (cf. [49], Th. 4.13, pág. 54). Ahora

$$\left|\int_X f_n\ g\ d\mu\right| \leq \left|\int_{X-E} f_n\ g\ d\mu\right| + \left|\int_{E\cap\{|g|\geq M\}} f_n\ g\ d\mu\right| + \left|\int_F f_n\ g\ d\mu\right|. \tag{163}$$

Por (162)

$$\left|\int_{X-E} f_n\ g\ d\mu\right| \leq \int_{X-E} |f_n\ g|\ d\mu \leq \|f_n\|_p \left(\int_{X-E} |g|^q\ d\mu\right)^{1/q} \leq S\ \varepsilon, \tag{164}$$

por (160) y (161)

$$\left|\int_{E\cap\{|g|>M\}} f_n\ g\ d\mu\right| \leq \|f_n\|_p \left(\int_{\{|g|>M\}} |g|^q\ d\mu\right)^{1/q} \leq S\ \varepsilon \tag{165}$$

y

$$\begin{aligned}\left|\int_F f_n\ g\ d\mu\right| &\leq \left|\int_F f_n\ (g-s)\ d\mu\right| + \left|\int_F f_n\ s\ d\mu\right| \qquad (166)\\ &\leq \int_F |f_n\ (g-s)|\ d\mu + \left|\int_F f_n\ s\ d\mu\right|\\ &\leq \varepsilon\ S + \left|\int_F f_n\ s\ d\mu\right|.\end{aligned}$$

Por hipótesis de (166) resulta $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\int_F f_n\ g\ d\mu\right| \leq \varepsilon\ S$ y por (163) - (165) tenemos $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\int_X f_n\ g\ d\mu\right| \leq 3\ S\ \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario sigue (i).

(ii) Sea $h \in L^\infty(X,\ \Sigma,\ \mu)$ y veamos que $\int_X f_n\ h\ d\mu \to 0$. Podemos suponer $h \neq 0$, $0 < \xi < \|h\|_\infty$, de modo que $\mu(\{|h| > \xi\}) > 0$. Si $(X_k)_{k\geq 1}$ es como en (i) tenemos $\{|h| > \xi\} = \cup_{k=1}^\infty \{|h| > \xi\} \cap X_k$. Luego existe un entero positivo H tal que $\mu(\{|h| > \xi\} \cap X_H) > 0$. No perdemos generalidad entonces si suponemos que $0 < \mu(\{|h| > \xi\}) < \infty$. Por lo tanto, hay alguna función simple t soportada en $\{|h| > \xi\}$ tal que

$|h-t| \leq \xi$ uniformemente (cf. [49], Th. 4.13, pág. 54). Tenemos

$$\left|\int_X f_n\ h\ d\mu\right| \leq \left|\int_{\{|h|\leq\xi\}} f_n\ h\ d\mu\right| + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n\ h\ d\mu\right|$$

$$\leq \xi\ \|f_n\|_1 + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n(h-t)\ d\mu\right| + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n t\ d\mu\right|$$

$$\leq \xi\ S + \xi\ \|f_n\|_1 + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n\ t\ d\mu\right|$$

$$\leq 2\ \xi\ S + \left|\int_{\{|h|>\xi\}} f_n\ t\ d\mu\right|.$$

Entonces por la hipótesis $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\int_X f_n\ h\ d\mu\right| \leq 2\ \xi\ S$ y como ξ es arbitrario la condición es suficiente. La condición es evidentemente necesaria.

(iii) Si $x \geq 0,\ y \geq 0$ se tiene

$$|x^p - y^p| \leq \begin{cases} |x-y|^p & si\quad 0 < p < 1, \\ \\ p\,|x-y|\,(x^{p-1} - y^{p-1}) & si\quad 1 \leq p < +\infty. \end{cases} \tag{167}$$

En efecto, la desigualdad correspondiente a $0 < p < 1$ es homogénea y equivalente a

$$1 - t^p \leq (1-t)^p\,,\ 0 \leq t \leq 1. \tag{168}$$

La función $\alpha\,(t) = (1-t)^p + t^p - 1,\ 0 < t < 1$, tiene derivada

$$\acute{\alpha}(t) = p\left[t^{p-1} - (1-t)^{p-1}\right],$$

nula para $t = 1/2$. Evidentemente $\acute{\alpha}(1/2) < 0$ y α alcanza su máximo valor en $t = 1/2$. Como $\alpha\,(0^+) = \alpha\,(1^-) = 0$ entonces $\alpha \geq 0$ y sigue (168). Si $1 \leq p < +\infty$ y $x \neq y$ en $[0,+\infty)$, por el teorema del valor medio existe ξ entre x e y tal que

$$|x^p - y^p| = p\ \ |x-y|\ \ \xi^{p-1} \leq p\ \ |x-y|\ \ \left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$$

y tenemos (167). Dadas $f,\ g \in L^p(X,\Sigma,\mu)$, si $0 < p < 1$ podemos escribir

$$\int_X \left||f|^p - |g|^p\right| d\mu \leq \int_X |f-g|^p \, d\mu,$$

de donde sigue la afirmación. Si $1 \leq p < +\infty$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_X \left||f|^p - |g|^p\right| d\mu &\leq p \int_X \left||f| - |g|\right| \left(|f|^{p-1} + |g|^{p-1}\right) d\mu \\
&\leq p \int_X |f-g| \left(|f|^{p-1} + |g|^{p-1}\right) d\mu \\
&\leq p \, \|f-g\|_p \left[\|f\|_p^{p/q} + \|g\|_p^{p/q}\right],
\end{aligned}$$

e inmediatamente sigue la tesis. □

6.2. Sobre las $\sigma-$ álgebras de Borel y de Lebesgue.

Con la notación del Problema 5.12,

(i) Existe una función monótono - creciente continua $f : I \to I$ constante sobre cada componente de $I - T$.

(ii) La función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + x$, es un homeomorfismo entre $[0,1]$ y $[0,2]$.

(iii) $F(T)$ tiene medida de Lebesgue uno, i.e. $|F(T)| = 1$.

(iv) Existe $A \subseteq I$ medible Lebesgue tal que $F(A)$ no lo es.

(v) Probar que la $\sigma-$ álgebra de Lebesgue es estrictamente mayor que la de Borel.

Solución

(i) Consideremos las funciones continuas

$$f_1 : I \to I,\ f_1(x) = \begin{cases} (3x)/2 & si \quad 0 \le x \le 1/3, \\ 1/2 & si \quad 1/3 \le x \le 2/3, \\ (3x-1)/2 & si \quad 2/3 \le x \le 1, \end{cases}$$

$$f_2 : I \to I,\ f_2(x) = \begin{cases} (9x)/4 & si \quad 0 \le x \le 1/9, \\ 1/4 & si \quad 1/9 \le x \le 2/9, \\ (9x-1)/4 & si \quad 2/9 \le x \le 3/9, \\ 1/2 & si \quad 3/9 \le x \le 6/9, \\ (9x)/4-1 & si \quad 6/9 \le x \le 7/9, \\ 3/4 & si \quad 7/9 \le x \le 8/9, \\ (9x-5)/4 & si \quad 8/9 \le x \le 1, \end{cases}$$

....

Por construcción tendremos $f_2 = f_1$ sobre $I - T^1$, $f_3 = f_2$ sobre $I - T^2$, etc. y $|f_n - f_{n+1}| \le 2^{-n-1}$ puntualmente para cada $n \ge 1$. Sea $f : I \to I$ la función $f = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + ...$ Entonces f es continua porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$ es uniformemente convergente. Además, como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in I$ y cada f_n es monótona creciente entonces f deviene monótona creciente. Finalmente, dado $N \ge 1$ tenemos $f_{N+1} = f_N$ sobre $I - T^N$. Como $T^1 \supseteq T^2 \supseteq ...$ y $f_{N+2} = f_{N+1}$ sobre $I - T^{N+1}$ entonces también $f_{N+2} = f_{N+1}$ sobre $I - T^N$. Así $f_N = f_{N+1} = ...$ sobre $I - T^N$, i.e. $f\,|_{I-T^N} = f_N$, i.e. f es constante en cada componente de $I - T$.

(ii) Como $F(0) = 0$ y $F(1) = 2$ entonces $F : [0,1] \to [0,2]$ es suryectiva. Como f es monótona creciente entonces F es inyectiva. Ahora sigue (ii) porque I es compacto Hausdorff y evidentemente F es continua.

(iii) Podemos escribir $I - T = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, donde

$$|S_1| = 1/3, \quad |S_2| = |S_3| = 1/9, \ |S_4| = ... = |S_7| = 1/(27), \ ...$$

Es fácil ver que

$$|F(S_1)| = 1/3, \quad |F(S_2)| = |F(S_3)| = 1/9,$$

$$|F(S_4)| = ... = |F(S_7)| = 1/(27), \ ...$$

Entonces $F(T)$ es cerrado y

$$|F(T)| = 2 - |F(I - T)| = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} |F(S_n)| = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

(iv) Como $F(T)$ tiene medida positiva contiene algún conjunto no medible (cf. [18], Th. 1.17, pág. 12). Como $F : I \to [0, 2]$ es biyectiva, existe entonces $A \subseteq I$ tal que $F(A) \subseteq F(T)$ y $F(A)$ es no medible. Como $A \subseteq T$ entonces A es medible pues $|T| = 0$.

(v) Notemos que $\chi_A \circ F^{-1} = \chi_{F(A)}$. Además A será boreliano sii χ_A es medible Borel. Pero si χ_A fuese medible Borel dado $a \in \mathbb{R}$ tendríamos

$$\left(\chi_A \circ F^{-1}\right)^{-1} \{(a, +\infty)\} = \left(F^{-1}\right)^{-1} \ (\{\chi_A > a\})$$

y $\chi_A \circ F^{-1}$ sería medible Lebesgue. Como $F(A)$ no es medible sigue (v). $\square$

6.3. Semiálgebras de conjuntos, álgebras generadas y extensión de ciertas funciones de conjunto dadas sobre las primeras. Caso de la semiálgebra de intervalos semiabiertos a izquierda de $\mathbb{R}$.

(i) Sea $\mathcal{C}$ una semiálgebra[81] de conjuntos y sea $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty)$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ si $\emptyset \in \mathcal{C}$. Entonces μ tiene una única extensión al álgebra

[81] Por *semiálgebra* entendemos una familia de conjuntos $\mathcal{C}$ cerrada por intersecciones en la que el complemento de cada miembro de $\mathcal{C}$ es unión disjunta finita de elementos de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es una semiálgebra el conjunto vacío y la familia de todas las uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{C}$ es un álgebra, denominada álgebra generada por $\mathcal{C}$.

generada por $\mathcal{C}$ si (a) Si un elemento $C \in \mathcal{C}$ es unión disjunta finita de una colección $\{C_i\} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\mu(C) = \sum \mu(C_i)$; (b) Si un elemento $C \in \mathcal{C}$ es unión disjunta numerable de una colección $\{C_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ entonces $\mu(C) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(C_i)$.

(ii) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente continua a la derecha y $\mathcal{C}$ la semiálgebra de intervalos semiabiertos a izquierda de $\mathbb{R}$. Si escribimos $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ entonces μ verifica la condición (a) de (i).

(iii) Si además $-\infty \leq a < b < +\infty$ y $(a,b] \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$ entonces

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)),$$

donde $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$. El resultado también tiene sentido para $b = +\infty$ si escribimos $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Solución

(i) Supongamos que un conjunto A es representable como unión finita disjunta de dos subcolecciones $\{C_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{D_j\}_{1 \leq j \leq m}$ de $\mathcal{C}$. Fijado i, como $C_i = \cup_{j=1}^{m} C_i \cap D_j$ por (a) obtenemos $\mu(C_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(C_i \cap D_j)$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(D_j)$$

y podemos definir $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$. Claramente μ deviene monótona respecto a la inclusión de modo que si además $\{C_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ es una colección numerable disjunta y $C = \cup_{i \geq 1} C_i$ entonces para cada $j \geq 1$ se tiene $\mu\left(\cup_{i=1}^{j} C_i\right) \leq \mu(C)$. Luego $\sum_{i=1}^{j} \mu(C_i) \leq \mu(C)$ y haciendo $j \to +\infty$ deducimos $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \leq \mu(C)$. Por (b) vemos entonces que μ es numerablemente aditiva sobre el álgebra generada por $\mathcal{C}$, o sea μ se extiende a una medida sobre dicha álgebra. La unicidad es inmediata.

(ii) Supongamos que

$$A = \cup_{i=1}^{n} (a_i,\ b_i] = \cup_{j=1}^{m} (c_j,\ d_j], \tag{169}$$

donde tanto $\{(a_i,\ b_i]\}_{1\leq i\leq n}$ como $\{(c_j,\ d_j]\}_{1\leq j\leq m}$ son familias disjuntas. Podemos suponer entonces

$$a_1 < b_1 \leq a_2 < ... \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n, \tag{170}$$

$$c_1 < d_1 \leq c_2 < ... \leq c_{m-1} < d_{m-1} \leq c_m < d_m.$$

Si $n = 1$ entonces $c_1 = a_1,\ d_m = b_1$, $b_j = c_{j+1}$ si $1 \leq j < m$ y

$$\sum_{j=1}^{m} F(d_j) - F(c_j) = F(d_m) - F(c_1) = F(b_1) - F(a_1).$$

Si $n > 1$ y asumimos el resultado cierto para $\leq n$ y cualquier m sea $A = \cup_{i=1}^{n+1} (a_i,\ b_i]$, con $b_n < a_{n+1}$. Por (169) y (170) tenemos $b_n = d_J$ y $(a_{n+1},\ b_{n+1}] = \cup_{m=J+1}^{m} (c_j,\ d_j]$ para un único $J \in \{1,\ ...\ ,\ m-1\}$. Por la hipótesis inductiva escribimos

$$\left(\sum_{j=1}^{J} + \sum_{j=J+1}^{m}\right) (F\,(d_j) - F(c_j)) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$$

$$+ F(b_{n+1}) - F(a_{n+1})$$

y, por inducción, sigue (ii).

(iii) Podemos suponer que $S = \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i))$ es finito. En primer lugar, si a y b son finitos, dado $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0,\ \eta_i > 0$ tales que

$$F(a+\delta) \leq F(a) + \varepsilon \quad y \quad F(b_i + \eta_i) \leq F(b_i) + \varepsilon$$

si $i = 1,\ 2,\ ...$ Como $[a+\delta, b] \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} (a_i,\ b_i + \eta_i)$ y $[a, b]$ es compacto existe un entero positivo N tal que

$$[a+\delta, b] \subseteq \cup_{i=1}^{N} (a_i,\ b_i + \eta_i)\,. \tag{171}$$

Podemos suponer que ningún intervalo de la sucesión $\{(a_i, b_i]\}_{i\geq 1}$ está contenido en otro de la misma sucesión. Usando (171), si

$$a_{i_1} < a + \delta < b < b_{i_1} + \eta_{i_1}$$

para cierto $i_1 \in \{1,\ ...,\ N\}$ por la monotonía de F resulta

$$F(b) - F(a+\delta) \leq F(b_{i_1}) + \varepsilon/2^{i_1} - F(a_{i_1}) \leq S + \varepsilon. \tag{172}$$

Si $a_{i_1} < a + \delta < b_{i_1} + \eta_{i_1}$ pero $b \geq b_{i_1} + \eta_{i_1}$ existe $i_2 \in \{1,\ ...,\ N\}$ tal que $a_{i_2} < b_{i_1} + \eta_{i_1} < b_{i_2} + \eta_{i_2}$. En particular, notemos que $a_{i_1} \leq a_{i_2}$. Si $b \geq b_{i_2} + \eta_{i_2}$ existe $i_3 \in \{1,\ ...,\ N\}$ tal que $a_{i_3} < b_{i_2} + \eta_{i_2} < b_{i_3} + \eta_{i_3}$ y $a_{i_2} \leq a_{i_3}$. Continuando de esta manera, existirá $k \in \{1,\ ...,\ N\}$ tal que $b_{i_k} + \eta_{i_k} > b > a_{i_k}$ y $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq ... \leq a_{i_k}$. Entonces

$$F(b) - F(a+\delta) \leq F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) - F(a_{i_1}) \tag{173}$$

$$= F(b_{i_k} + \eta_{i_k}) - F(a_{i_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(F(a_{i_{j+1}}) - F(a_{i_j})\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \left(F(b_{i_j} + \eta_{i_j}) - F(a_{i_j})\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \left(F(b_{i_j}) - F(a_{i_j}) + \varepsilon/2^{i_j}\right) \leq S + \varepsilon.$$

Por ser F monótona y continua a derecha si $\delta \to 0^+$ en (172) o (173) obtenemos $0 \leq F(b) - F(a) \leq S + \varepsilon$ y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario tenemos el resultado. Si $a = -\infty$ y b es finito para $K < 0$ tenemos $F(b) - F(K) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(F(b_i) - F(a_i)\right)$ y, como F es continua a derecha, basta hacer $K \to -\infty$. Análogamente se procede en el caso $b = +\infty$. $\square$

6.4. Algunas integrales de Riemann - Stieltjes.

Sea $F(x) = x + [x]\,,\ x \in [0, +\infty)$.

(i) Calcular $\int_0^2 x^2\ dF(x)$.

(ii) Determinar los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $1/(1+x)^\alpha \in L^1\left([0,+\infty)\,,\ dF\right)$.

Solución

(i) Como $x \to x^2$ es continua sobre $[0,2]$ y $F \in BV\,[0,2]$ existe $\int_0^2 x^2 \; dF(x)$ (cf. [6], Teorema 3.2, pág. 36). Si $N \in \mathbb{N}$ escribimos

$$(0,2] = \cup_{k=1}^{2^{N+1}} \left(\frac{k-1}{2^N},\; \frac{k}{2^N} \right], \qquad \varphi_N = \sum_{k=1}^{2^{N+1}} \left(\frac{k-1}{2^N} \right)^2 \; \chi_{\left(\frac{k-1}{2^N},\; \frac{k}{2^N} \right]}.$$

Entonces

$$\int_0^2 \varphi_N \; dF = \sum_{k=1}^{2^{N+1}} \left(\frac{k-1}{2^N} \right)^2 \left[F\left(\frac{k}{2^N} \right) - F\left(\frac{k-1}{2^N} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{1 \le k \le 2^{N+1}-1 \\ k \ne 2^N}} \left(\frac{k-1}{2^N} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2^N} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2^N} \right)$$

$$= \frac{1}{8^N} \sum_{\substack{1 \le j \le 2^{N+1}-1 \\ j \ne 2^N - 1}} \frac{1}{j^2} + o(N)$$

$$= \frac{\left(2^{N+1} - 1 \right) 2^{N+1} \left(2^{N+2} - 1 \right) /6 - \left(2^N - 1 \right)^2}{8^N} \; + o(N)$$

$$= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{N+1}} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{N+2}} \right) + o(N)$$

de donde $\lim_{N \to +\infty} \int_0^2 \varphi_N \; dF = 8/3$ y, como F es creciente, x^2 es acotada y Riemann - Stieltjes integrable, $\int_0^2 x^2 \; dF(x) = 8/3$ (cf. [6], Teorema 3.3, pág. 37).

(ii) Fijado $N \in \mathbb{N}$ hacemos ahora

$$\psi_{k,N} = \sum_{j=1}^{2^k} \left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k} \right)^{-\alpha} \; \chi_{\left(\frac{(j-1)N}{2^k},\; \frac{jN}{2^k} \right]}, \;\; k \ge 1.$$

Entonces

$$\int_0^N \psi_{k,N}\ dF =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha}\ \left[F\left(\frac{jN}{2^k}\right) - F\left(\frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)\right]$$

$$= \frac{2N}{\left(1 + \left(2^k - 1\right)\ N/2^k\right)^{\alpha}} +$$

$$+ \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\frac{2^k h}{N} \le j < \frac{2^k (h+1)}{N}} \left[\left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{jN}{2^k}\right)^{-\alpha}\right] \left(h + \frac{jN}{2^k}\right). \tag{174}$$

Por (174) tenemos

$$\underline{\lim}_{k\to+\infty} \int_0^N \psi_{k,N}\ dF \ge \frac{2N}{(1+N)^{\alpha}},$$

de manera que $1/(1+x)^{\alpha} \notin L^1\left([0,+\infty),\ dF\right)$ si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$ en (174) y hacemos $N = 2^n$ obtenemos

$$\int_0^{2^n} \psi_{k,2^n}\ dF \ge \sum_{h=0}^{2^n-1} \sum_{2^{k-n} h \le j < 2^{k-n}(h+1)} \frac{2^{n-k}\ \left(h + j2^{n-k}\right)}{\left(1 + (j-1)2^{n-k}\right)\left(1 + j2^{n-k}\right)}$$

$$\ge 2\ \sum_{h=0}^{2^n-1} \frac{h}{(h+2)\left(h+2-2^{n-k}\right)}.$$

Por lo tanto

$$\underline{\lim}_{k\to+\infty} \int_0^{2^n} \psi_{k,2^n}\ dF \ge 2\ \sum_{h=0}^{2^n-1} \frac{h}{(h+2)^2}$$

y evidentemente $1/(1+x) \notin L^1\left([0,+\infty),\ dF\right)$. Si $x > 0,\ \varepsilon > 0,\ \alpha > 1$ resulta

$$x^{-\alpha} - (x+\varepsilon)^{-\alpha} = \alpha \int_x^{x+\varepsilon} x^{-\alpha-1}\ dx \le \alpha\ \varepsilon\ x^{-\alpha-1} \tag{175}$$

y por (174) y (175):

$$\sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\frac{2^k h}{N} \leq j < \frac{2^k (h+1)}{N}} \left[\left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{jN}{2^k}\right)^{-\alpha} \right] \left(h + \frac{jN}{2^k}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\alpha N}{2^k} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{\frac{2^k h}{N} \leq j < \frac{2^k (h+1)}{N}} \left(1 + \frac{(j-1)\,N}{2^k}\right)^{-\alpha-1} \left(h + \frac{jN}{2^k}\right) \qquad (176)$$

$$\leq \alpha \sum_{h=0}^{N-1} \frac{2h+1}{(h+1-N/2^k)^{\alpha+1}}.$$

Como $x \to 1/(1+x)^{\alpha}$ es continua sobre $[0, N]$ y $F \in BV\,[0, N]$, usando (174) y (176) deducimos

$$\int_0^N \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}\, dF(x) = \overline{\text{lím}}_{k \to +\infty} \int_0^N \psi_{k,N}\, dF \qquad (177)$$

$$\leq \frac{2N}{(1+N)^{\alpha}} + \alpha \sum_{h=0}^{N-1} \frac{2h+1}{(h+1)^{\alpha+1}}.$$

En definitiva $1/(1+x)^{\alpha} \in L^1\left([0, +\infty)\,,\ dF\right)$ sii $\alpha > 1$, en cuyo caso

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{\alpha}}\, dF(x) \leq \alpha \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2h+1}{(h+1)^{\alpha+1}}. \qquad \square$$

6.5. Anillos, semianillos y álgebras de conjuntos. Todo semianillo cerrado por uniones finitas es anillo. Si $\mathcal{S}$ es semianillo y $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$, el $\sigma-$ anillo generado por $\mathcal{S}$ coincide con el generado por $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. Si X es un conjunto no vacío, $\mathcal{K}$ es una familia de subconjuntos de X cerrada por uniones e intersecciones finitas, $\mathcal{A}$ es la clase de uniones finitas disjuntas de miembros de $\mathcal{K}$ o de conjuntos del tipo $K-H,\ K,\ H \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ es el álgebra generada por $\mathcal{K}$.

(i) Dar ejemplos de anillos y álgebras de conjuntos. [82]

(ii) Dar ejemplos de semianillos. [83]

(iii) Mostrar que todo semianillo cerrado por uniones finitas es un anillo.

(iv) Si $\mathcal{S}$ es semianillo y $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es el anillo generado por $\mathcal{S}$, $S(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = S(\mathcal{S})$, i.e. el $\sigma-$ anillo generado por $\mathcal{S}$ coincide con el generado por $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. [84]

(v) Sea X conjunto no vacío, $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos de X cerrada por uniones e intersecciones finitas, $\mathcal{A}$ la clase de uniones finitas disjuntas de miembros de $\mathcal{K}$ o de conjuntos del tipo $K-H,\ K,\ H \in \mathcal{K}$. $\mathcal{A}$ es el álgebra $\mathfrak{a}(\mathcal{K})$ generada por $\mathcal{K}$.

Solución

(i1) Si $X = \mathbb{R}^n$ sea $\mathcal{A}_n$ la clase de uniones finitas de conjuntos del tipo $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$, donde $-\infty < a_i < b_i < +\infty,\ 1 \leq i \leq n$. En particular,

[82] Dado un conjunto X llamamos *anillo* a toda clase no vacía de partes de X cerrada por uniones finitas y diferencias. Denominamos *álgebra* a toda clase no vacía de partes de X cerrada por uniones finitas y complementos.

[83] Llamamos *semianillo* de partes de un conjunto X a toda clase $\mathcal{S}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ es cerrada por intersecciones y dados $A,\ B \in \mathcal{S}$ tales que $A \subseteq B$ existen $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n$ en $\mathcal{S}$ tales que $A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n = B$ y $A_i - A_{i-1} \in \mathcal{S}$ si $1 \leq i \leq n$.

[84] Por $\sigma-$ anillo de partes de un conjunto X entendemos toda clase no vacía cerrada por diferencias y uniones numerables.

es fácil ver que $\mathcal{A}_1$ es un anillo y, evidentemente, no es álgebra. Como para conjuntos $A,\ B,\ C$ se verifican las identidades

$$A \times B - C \times D = (A - C) \times B \cup A \times (B - D)\,,$$

$$(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C, \quad A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$$

entonces $\mathcal{A}_n$ es anillo en general.

(i2) Si X es no numerable, la clase de partes numerables de X es otro ejemplo de anillo que no es álgebra.

(i3) Si X es no numerable, la clase de partes de X que son numerables o tienen complemento numerable es un álgebra (por lo tanto anillo).

(i4) Sea E una parte no vacía de X y sea $\mathcal{A}(E)$ el anillo generado por E. Entonces $\mathcal{A}(E) = \{\emptyset, E\}$ y $\mathcal{A}(E)$ no es un álgebra.

(i5) Sea E una parte no vacía de X y sea $\mathcal{A}_E$ el anillo generado por las partes F de X que contienen a E. Ahora

$$\mathcal{A}_E = \{F \in \mathcal{P}(X) :\ E \subseteq F \text{ o } F \cap E = \emptyset\}\,. \tag{178}$$

En efecto, si $F,\ G \in \mathcal{P}(X)$, $E \subseteq F$ o $E \subseteq G$ entonces $E \subseteq F \cup G$. Si F y G son disjuntos con E también lo es su unión. Como

$$E \subseteq F,\ E \subseteq G \Rightarrow (F - G) \cap E = \emptyset,$$

$$E \subseteq F,\ E \cap G = \emptyset \Rightarrow E \subseteq F - G,$$

$$E \cap F = \emptyset,\ E \subseteq G \Rightarrow (F - G) \cap E = \emptyset,$$

$$E \cap F = E \cap G = \emptyset \Rightarrow (F - G) \cap E = \emptyset$$

el miembro derecho en (178) es un anillo que contiene a toda parte de X que contenga a E. Además, si una parte F de X contiene a E entonces pertenece a $\mathcal{A}_E$ mientras que si es disjunta con E entonces $E \subseteq X - F$. En este caso $X - F \in \mathcal{A}_E$ y, como $X \in \mathcal{A}_E$ entonces $F \in \mathcal{A}_E$. En definitiva es válida (178) y $\mathcal{A}_E$ es un álgebra.

(i6) Suponiendo que X tiene más de dos elementos, sea D la clase de todos sus subconjuntos con exactamente dos elementos y $\mathcal{A}_D$ el anillo generado por D. Ahora si $x_1,\ x_2,\ x_3$ son elementos distintos de X tenemos $\{x_1, x_2\} \cap \{x_1, x_3\} = \{x_1\}$, es decir, $\mathcal{A}_D$ debe contener los conjuntos de un solo elemento. En consecuencia $\mathcal{P}_f(X) \subseteq \mathcal{A}_D$ y, como $D \subseteq \mathcal{P}_f(X)$ entonces $\mathcal{A}_D = \mathcal{P}_f(X)$. En este caso $\mathcal{A}_D$ será álgebra si y solo si X es finito.

(ii1) Si X es un conjunto la clase formada por el conjunto vacío y los conjuntos de un solo punto es un semianillo.

(ii2) En la recta real, la clase de intervalos del tipo $[a, b)$, con $a < b$, es un semianillo.

(ii3) Sea $\mathfrak{R}$ un reticulado de partes de un conjunto X. [85] Sea $\mathcal{S}$ la clase de conjuntos del tipo $E - F$, donde $E,\ F$ son elementos de $\mathfrak{R}$ y $F \subseteq E$. Evidentemente $\emptyset \in \mathcal{S}$ y, si $E_1 - F_1,\ E_2 - F_2$ pertenecen a $\mathcal{S}$ entonces

$$(E_1 - F_1) \cap (E_2 - F_2) = (E_1 \cap E_2) - (E_1 \cap F_2 \cup E_2 \cap F_1),$$

$$E_1 \cap F_2 \cup E_2 \cap F_1 \subseteq E_1 \cap E_2,$$

$$E_1 \cap F_2 \cup E_2 \cap F_1 \in \mathfrak{R},\ E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{R}$$

y $(E_1 - F_1) \cap (E_2 - F_2) \in \mathcal{S}$. Supongamos que $E_1 - F_1,\ E_2 - F_2$ pertenecen a $\mathcal{S}$ y $E_1 - F_1 \subseteq E_2 - F_2$. Entonces

$$E_1 - F_1 \subseteq E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2 \subseteq E_2 - F_2,$$

y $(E_2 - F_2) - (E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2)$, $(E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2) - (E_1 - F_1)$ y $E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2$ pertenecen a $\mathcal{S}$ porque

$$E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2 \subseteq E_2 - F_2,$$

$$E_1 - F_1 \subseteq E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2,$$

$$E_2 - F_2 \subseteq E_1 \cap E_2,$$

[85] Por *reticulado* entendemos toda clase de conjunto que contiene al vacío y es cerrada por uniones e intersecciones finitas.

y además

$$(E_2 - F_2) - (E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2) = E_2 - (E_1 \cup F_2),$$

$$(E_1 \cap E_2 - E_1 \cap F_2) - (E_1 - F_1) = (E_2 \cap F_1) - F_2,$$

y por ser $\mathfrak{R}$ un reticulado $\mathcal{S}$ es un semianillo. Notemos que, en general, $\mathcal{S}$ no es un anillo. P. ej. si $\mathfrak{R}$ consiste del conjunto vacío y de las semirrectas $(c, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{S}$ contiene al conjunto vacío y a los intervalos del tipo $(a, b]$, $a < b$ en $\mathbb{R}$, o sea $\mathcal{S}$ no es cerrado por uniones finitas.

(iii) Sea $\mathcal{S}$ un semianillo de partes de un conjunto X y sea $\mathcal{R}$ la clase de uniones finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$. Evidentemente $\mathcal{R}$ es cerrada por intersecciones y uniones finitas disjuntas. Si $E_1,\ F_1 \in \mathcal{S}$ y $E_1 \subseteq F_1$ entonces $F_1 - E_1 \in \mathcal{R}$. En efecto, existen

$$G_0 = E_1 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_n = F_1$$

en $\mathcal{S}$ tales que $G_i - G_{i-1} \in \mathcal{S}$ si $1 \leq i \leq n$. Además

$$F_1 - E_1 = \cup_{i=1}^{n} (G_i - G_{i-1}),$$

donde la unión es disjunta. Sea ahora $E_2 \in \mathcal{S},\ F_2 \in \mathcal{R},\ E_2 \subseteq F_2$ y veamos que $F_2 - E_2 \in \mathcal{R}$. Podemos escribir $F_2 = \cup_{j=1}^{m} H_j$, donde la unión es disjunta y $\{H_j\}_{1 \leq j \leq m} \subseteq \mathcal{S}$. Entonces

$$F_2 - E_2 = \cup_{j=1}^{m} \cap_{k=1}^{m} (H_j - (E_2 \cap H_k))$$

$$= \cup_{j=1}^{m} H_j - (E_2 \cap H_j)$$

y, por la observación anterior y la naturaleza de los elementos de $\mathcal{R}$ sigue la afirmación. A continuación, sea $E_3 \in \mathcal{R},\ F_3 \in \mathcal{R},\ E_3 \subseteq F_3$. Escribimos $E_3 = \cup_{k=1}^{p} K_k,\ F_3 = \cup_{l=1}^{q} L_l$, donde $\{K_k\}_{1 \leq k \leq p}$ y $\{L_l\}_{1 \leq l \leq q}$ son subfamilias disjuntas de $\mathcal{S}$. Entonces

$$F_3 - E_3 = \cup_{l=1}^{q} \cap_{k=1}^{p} (L_l - L_l \cap K_k),$$

la unión es disjunta; $L_l - L_l \cap K_k \in \mathcal{R}$ para cada k, l porque $L_l \cap K_k \subseteq L_l$, $\mathcal{S}$ es cerrado por intersecciones y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$; $\cap_{k=1}^{p} (L_l - L_l \cap K_k) \in \mathcal{S}$ pues

$\mathcal{S}$ es cerrado por intersecciones. En consecuencia $F_3 - E_3 \in \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones finitas disjuntas entonces, por la naturaleza de sus elementos, es cerrado por uniones. En definitiva $\mathcal{R}$ es un anillo y contiene a $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, esto es, al anillo generado por $\mathcal{S}$. Como todo elemento de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ es unión de miembros de $\mathcal{S}$ (cf. [19], Chapter I, Sec. 5, Th. B) entonces $\mathcal{R} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ y, en particular, sigue (iii).

(iv) Evidentemente $S(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \supseteq S(\mathcal{S})$. Además si $E \in S(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ hay una sucesión D de partes de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ tal que $E \in S(D)$ (cf. [19], Chapter I, Sec. 5, Th. D). Como cada elemento de D puede cubrirse con un número finito de elementos de $\mathcal{S}$ (cf. [19], Chapter I, Sec. 5, Th. B) entonces $D \subseteq S(\mathcal{S})$, de donde $S(D) \subseteq S(\mathcal{S})$ y $E \in S(\mathcal{S})$.

(v) Evidentemente $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{a}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones finitas. Bastará ver que $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Sean

$$A_l = \bigcup_{i=1}^{n_l} K_i^l - H_i^l,\ H_i^l \subseteq K_i^l,\ \{H_i,\ K_i\}_{1 \le i \le n_l} \subseteq \mathcal{K},\ l = 1,\ 2,$$

donde las uniones son disjuntas y eventualmente algunos $H_i^{l\prime} s$ pueden ser vacíos. $A_1,\ A_2 \in \mathcal{A}$ y

$$A_1 - A_2 = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n_1, \\ J \in \mathcal{P}(\{1,\ldots,n_2\})}} B_{i,J},$$

$$B_{i,J} \doteq K_i^1 \bigcap \cap_{j \in J} H_j^2 - \left(H_i^1 \bigcup \cup_{k \in \{1,\ldots,n_2\} - J} K_k^2 \right).$$

Por ser $\mathcal{K}$ cerrado por uniones e intersecciones finitas, cada $B_{i,J}$ es diferencia de miembros de $\mathcal{K}$ y es realizable como miembro de $\mathcal{A}$. Si $1 \le i,\ l \le n_1,\ J,\ L \in \mathcal{P}(\{1, \ldots, n_2\})$, como

$$B_{i,J} \cap B_{l,L} \subseteq \left(K_i^1 - H_i^1 \right) \cap \left(K_l^1 - H_l^1 \right)$$

sigue que $i = l$ si $B_{i,J} \cap B_{l,L} \ne \emptyset$. Si además existese $h \in J - L$ entonces $H_h^2 - K_h^2 \ne \emptyset$, lo cual no es cierto. Luego $J \subseteq L$ y, por la misma razón, $L \subseteq J$, i.e. $L = J$. Entonces $\{B_{i,J}\}$ es disjunta y $A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$. $\square$

6.6. Medidas sobre la $\sigma-$ álgebra generada por un $\sigma-$ anillo de partes de un conjunto X que no es $\sigma-$ álgebra. Medidas semifinitas. Medidas saturadas. Integración de funciones localmente medibles.

(i) Sea $\mathcal{R}$ un $\sigma-$ anillo de partes de un conjunto X que no es $\sigma-$ álgebra y sea $A(\mathcal{R})$ la $\sigma-$ álgebra generada por $\mathcal{R}$.

(a) $A(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$ y $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^c = \emptyset$, donde $\mathcal{R}^c = \{E : \ E^c \in \mathcal{R}\}$.

(b) Si μ es una medida sobre $\mathcal{R}$ sea $\overline{\mu}(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{R}$ y $\overline{\mu}(E) = \infty$ si $E \in \mathcal{R}^c$. Entonces $\overline{\mu}$ es una medida sobre $A(\mathcal{R})$.

(c) Si μ es una medida sobre $\mathcal{R}$ sea $\underline{\mu}(E) = \sup\{\mu(F) : \ F \in \mathcal{R}, \ F \subseteq E\}$ si $E \in \mathcal{R}^c$ y $\underline{\mu}(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{R}$. También $\underline{\mu}$ es una medida sobre $A(\mathcal{R})$.

(ii) Sea $(X, \ \mathcal{B}, \ \mu)$ un espacio de medida.

(a) Si μ es $\sigma-$ finita entonces es *semifinita y saturada.*[86]

(b) Sea $\mathcal{C}$ la colección de partes localmente medibles de X. Si $E \in \mathcal{C}$ definimos $\widetilde{\mu}(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{B}$ y $\widetilde{\mu}(E) = +\infty$ si $E \notin \mathcal{B}$. Entonces $(X, \ \mathcal{C}, \ \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida saturada.

(c) Si μ es semifinita y $E \in \mathcal{C}$ sea $\widehat{\mu}(E) = \sup\{\mu(B) : \ B \in \mathcal{B}, \ B \subseteq E\}$. Entonces $(X, \ \mathcal{C}, \ \widehat{\mu})$ es un espacio de medida saturada y $\widehat{\mu}$ extiende a μ.

(iii)(a) Una función f es *localmente medible*[87] sii es $\widetilde{\mu}-$ medible.

(iii)(b) Si f es localmente medible y no negativa a.e. μ se define

$$\int_X f \ d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f, \\ \varphi - simple}} \int_X \varphi \ d\mu.$$

[86] Decimos que una medida es *semifinita* si todo conjunto medible, de medida infinita, contiene subconjuntos medibles de medida arbitrariamente grande. μ es *saturada* $\mathcal{B}$ contiene a todo subconjunto *localmente medible* de X. Si $E \subseteq X$, E es *localmente medible* si $E \cap F \in \mathcal{B}$ toda vez que $F \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < +\infty$.

[87] Una función es *localmente medible* si lo es su restricción a cada subconjunto medible de medida finita.

Si μ es semifinita entonces $\int_X f\ d\mu = \int_X f\ d\widetilde{\mu}$.

Solución

(i)(a) Debe ser $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^c = \emptyset$ pues $\mathcal{R}$ no es $\sigma-$ álgebra. Bastará ver que el conjunto $R = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$ es $\sigma-$ álgebra pues $A(\mathcal{R}) \supseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c$. Veremos que

$$\mathcal{R} - \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R}^c - \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R} - \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R}^c - \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^c, \tag{179}$$

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R},\ \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c,\ \mathcal{R}^c \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c. \tag{180}$$

La primer inclusión es inmediata. Si $E_1 \in \mathcal{R}^c$ y $F_1 \in \mathcal{R}^c$ entonces $E_1^c - F_1^c = F_1 - E_1$ y $E_1^c - F_1^c \in \mathcal{R}$ porque E_1^c y F_1^c pertenecen a $\mathcal{R}$. Así $F_1 - E_1 \in \mathcal{R}$ y, análogamente, $E_1 - F_1 \in \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R}^c - \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}$. Si $E_2 \in \mathcal{R}$ y $F_2 \in \mathcal{R}^c$ resulta

$$E_2 - F_2 = E_2 - E_2 \cap F_2,\quad E_2 \cap F_2 = E_2 - F_2^c,$$

$E_2 - F_2^c \in \mathcal{R}$ porque $\{E_2,\ F_2^c\} \subseteq \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es cerrado por diferencias obtenemos $E_2 - F_2 \in \mathcal{R}$. Además, $E_2^c \in \mathcal{R}^c$, $F_2 - E_2 = E_2^c \cap F_2$ y $\mathcal{R}^c$ es cerrado por intersecciones. En efecto, si $\{E_3,\ F_3\} \subseteq \mathcal{R}^c$ resulta $(E_3 \cap F_3)^c = E_3^c \cup F_3^c$, $E_3^c \cup F_3^c \in \mathcal{R}$ porque $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones y así $E_3 \cap F_3 \in \mathcal{R}^c$. En definitiva, R es cerrado por diferencias. Obviamente $\mathcal{R} \cup \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$. Si $E_4 \in \mathcal{R}$, $F_4 \in \mathcal{R}^c$ tenemos $F_4^c - E_4 = (E_4 \cup F_4)^c$ y $F_4^c - E_4 \in \mathcal{R}$, i.e. $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c$. Ahora, si $\{E_5,\ F_5\} \subseteq \mathcal{R}^c$ resulta $(E_5 \cup F_5)^c = E_5^c \cap F_5^c$ y $\mathcal{R}$ es cerrado por intersecciones. Ciertamente, si $\{E_6,\ F_6\} \subseteq \mathcal{R}$ entonces

$$E_6 \cap F_6 = E_6 \cup F_6 - E_6 \bigtriangleup F_6.$$

Como $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones y diferencias $E_6 \cap F_6 \in \mathcal{R}$. Luego $\mathcal{R}^c \cup \mathcal{R}^c \subseteq \mathcal{R}^c$ y sigue (180). Finalmente, como $\mathcal{R}$ es cerrado por uniones numerables, por (180) bastará ver que si $\{G_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{R}^c$ entonces $\cup_{n=1}^{\infty} G_n \in R$. Como $\mathcal{R}^c$ es cerrado por uniones finitas podemos suponer que la sucesión $\{G_n\}_{n\geq 1}$ es creciente. Tenemos

$$\cup_{n=1}^{\infty} G_n = G_1 \cup \cup_{n=1}^{\infty} (G_{n+1} - G_n)$$

y, por (179), $\{G_{n+1} - G_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}$. Luego $\cup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{R}^c \cup \mathcal{R}$ y, por (180), $\cup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{R}^c$.

(i)(b) Basta ver que $\overline{\mu}$ es $\sigma-$ aditiva. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq A(\mathcal{R})$ una sucesión disjunta, $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y veamos que $\overline{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n)$. Podemos suponer que $\{E_n\}_{n\geq 1} \cap \mathcal{R}^c \neq \emptyset$ por lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) = \infty$. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^c$ son cerrados por uniones numerables, por (180) deducimos que $E \in \mathcal{R}^c$ y $\overline{\mu}(E) = \infty$.

(i)(c) Veamos que $\underline{\mu}(G \cup H) = \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H)$ si $G \in A(\mathcal{R})$ y $H \in \mathcal{R}^c$. En efecto, si $G \in \mathcal{R}$ es $G \cup H \in \mathcal{R}^c$. Si $J \in \mathcal{R}$ y $J \subseteq H$ entonces $G \cap J = \emptyset$ en $\mathcal{R}$ y

$$\mu(G \cup J) = \mu(G) + \mu(J) \leq \underline{\mu}(G \cup J).$$

Como J es arbitrario $\underline{\mu}(G \cup H) \geq \mu(G) + \underline{\mu}(H)$. Si $L \in \mathcal{R}$ y $L \subseteq G \cup H$ entonces $L = G \cap L \cup H \cap L$. Sabemos que $G \cap L \in \mathcal{R}$ pues $\mathcal{R}$ es cerrado por intersecciones y $H \cap L = L - H^c$ pertenece a $\mathcal{R}$ por ser diferencia de miembros de $\mathcal{R}$. Luego

$$\mu(L) = \mu(G \cap L) + \mu(H \cap L) \leq \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H) \qquad (181)$$

y por ser L arbitrario sigue la afirmación en este caso. Si $G \in \mathcal{R}^c$ tenemos $G \cap L \in \mathcal{R}$ y se verifica también (181), con lo que

$$\underline{\mu}(G \cup H) \leq \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H).$$

Para la desigualdad contraria podemos suponer que $\underline{\mu}(G)$ y $\underline{\mu}(H)$ son positivos. Sean $0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{\underline{\mu}(G),\ \underline{\mu}(H)\right\}$, $K_G,\ K_H \in \mathcal{R}$ tales que $\mu(K_G) > \underline{\mu}(G) - \varepsilon$, $\mu(K_H) > \underline{\mu}(H) - \varepsilon$, $K_G \subseteq G$ y $K_H \subseteq H$. Entonces $K_G \cup K_H \in \mathcal{R}$, $K_G \cup K_H \subseteq G \cup H$ y

$$\underline{\mu}(G \cup H) \geq \mu(K_G \cup K_H)$$

$$= \mu(K_G) + \mu(K_H) > \underline{\mu}(G) + \underline{\mu}(H) - 2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario tenemos la afirmación. Como $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^c$ son cerrados por uniones numerables bastará ver entonces que si $\{F_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{R}^c$ es una sucesión disjunta y $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces $\underline{\mu}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(F_n)$. En particular, ya sabemos que $\underline{\mu}$ es $\sigma-$ finita sobre $\mathcal{R}^c$. Si $L \in \mathcal{R}$ y $L \subseteq F$ resulta $L = \cup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap L)$ y, para cada n, $F_n \cap L \in \mathcal{R}$. Por lo tanto

$$\mu(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap L) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(F_n)$$

y, por ser L arbitrario, $\underline{\mu}(F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(F_n)$. Para la desigualdad contraria, como $\underline{\mu}$ es monótona podemos suponer que $\underline{\mu}(F_n) < +\infty$ para todo n. Si $N \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \underline{\mu}(F_n) = \underline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) \leq \underline{\mu}(F)$$

y haciendo $N \to +\infty$ sigue (i)(c).

(ii)(a) Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de conjuntos de $\mathcal{B}$ de medida finita cuya unión es X, $Y \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(Y) = +\infty$. Como

$$Y = \cup_{n=1}^{\infty} X_n \cap Y \quad y \quad X_n \cap Y \uparrow$$

entonces $\lim_{n\to+\infty} \mu(X_n \cap Y) = +\infty$ y μ es semifinita. Además, si Y es localmente medible entonces $Y \in \mathcal{B}$ porque $X_n \cap Y \in \mathcal{B}$ para cada n.

(ii)(b) Evidentemente $\mathcal{C}$ es una $\sigma-$ álgebra y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, de manera que $\widetilde{\mu}$ está bien definida. Además $\widetilde{\mu}$ es no negativa y $\widetilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{C}$ una sucesión disjunta y $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Si $\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ entonces

$$\widetilde{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E_n) \tag{182}$$

pues $\widetilde{\mu}\mid_{\mathcal{B}} = \mu$. Si $\{E_n\}_{n\geq 1} \nsubseteq \mathcal{B}$ el miembro derecho en (182) es infinito. Deberá ser $\widetilde{\mu}(E) = +\infty$ porque, en caso contrario, para cada n tendríamos $E_n = E_n \cap E$ y $E_n \in \mathcal{B}$ por su local medibilidad. Concluímos que $\widetilde{\mu}$ es una medida. Sea G una parte $\widetilde{\mu}-$ localmente medible de X y veamos que $G \in \mathcal{C}$. En efecto, si $F \in \mathcal{B}$ y $\mu(F) < +\infty$ entonces $\widetilde{\mu}(F) < +\infty$ y $F \cap G \in \mathcal{C}$. Si fuera $F \cap G \notin \mathcal{B}$ sería $\widetilde{\mu}(F \cap G) = +\infty$ lo que no es posible. Luego $F \cap G \in \mathcal{B}$ y sigue (ii)(b).

(ii)(c) Es inmediato que $\mathcal{C}$ es una $\sigma-$ álgebra que contiene a $\mathcal{B}$ y que $\widehat{\mu}$ extiende a μ. Sean $B_1,\ B_2 \in \mathcal{C}$ disjuntos y veamos que

$$\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) = \widehat{\mu}(B_1) + \widehat{\mu}(B_2).$$

Podemos suponer que $\widehat{\mu}(B_1)$ y $\widehat{\mu}(B_2)$ son finitos. Si $\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) = +\infty$ existe $E \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}(B_1 \cup B_2)$ tal que $\mu(E) = +\infty$ o hay una sucesión

$\{E_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}\cap\mathcal{P}\,(B_1 \cup B_2)$ de conjuntos de medida finita tales que para $n \in \mathbb{N}$ es $\mu\,(E_n) > n$. Por la semifinitud de μ la segunda posibilidad se da seguramente. Si $n \in \mathbb{N}$ es

$$E_n = B_1 \cap E_n \cup B_2 \cap E_n, \quad B_1 \cap E_n \in \mathcal{B},\; B_2 \cap E_n \in \mathcal{B},$$

de modo que $n < \mu\,(B_1 \cap E_n) + \mu\,(B_2 \cap E_n)$, i.e. $\mu\,(B_1 \cap E_n) > n/2$ o $\mu\,(B_2 \cap E_n) > n/2$. Como n es arbitrario $\widehat{\mu}(B_1)$ y $\widehat{\mu}(B_2)$ no pueden ser ambos finitos, contrariamente a la hipótesis, i.e. $\widehat{\mu}(B_1 \cup B_2) < +\infty$. Ahora, si $G \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}\,(B_1 \cup B_2)$ entonces $G = B_1 \cap G \cup B_2 \cap G$ y como $\mu\,(G) < +\infty$ es $\{B_1 \cap G,\; B_2 \cap G\} \subseteq \mathcal{B}$. Así

$$\mu\,(G) = \mu\,(B_1 \cap G) + \mu\,(B_2 \cap G) \leq \widehat{\mu}(B_1) + \widehat{\mu}(B_2),$$

y como G es arbitrario $\widehat{\mu}(B_1)+\widehat{\mu}(B_2) \geq \widehat{\mu}\,(B_1 \cup B_2)$. Podemos suponer $\mu\,(B_1)$ y $\mu\,(B_2)$ positivos, y si $\varepsilon > 0$ sean $G_1,\ G_2 \in \mathcal{B}$ partes de B_1 y B_2 respectivamente tales que $\mu\,(G_i) > \widehat{\mu}\,(B_i) - \varepsilon/2,\ i = 1,\ 2$. Entonces $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{P}\,(B_1 \cup B_2)$,

$$\widehat{\mu}\,(B_1 \cup B_2) \geq \mu\,(G_1 \cup G_2)$$

$$= \mu\,(G_1) + \mu(G_2) > \widehat{\mu}\,(B_1) + \widehat{\mu}\,(B_2) - \varepsilon$$

y, siendo ε arbitrario, sigue la afirmación. En consecuencia $\widehat{\mu}$ es finitamente aditiva y es claramente monótona, de donde sigue fácilmente que $\widehat{\mu}$ es $\sigma-$ aditiva. Evidentemente todo conjunto $\widehat{\mu}-$ localmente finito es $\mu-$ localmente finito y por lo tanto, pertenece a $\mathcal{C}$, i.e. $(X,\ \mathcal{C},\ \widehat{\mu})$ es espacio de medida saturada.

(iii)(a) Trivial.

(iii)(b) Como $\widehat{\mu}$ extiende a μ es $\int_X f\ d\mu \leq \int_X f\ d\widehat{\mu}$. Ahora podemos suponer $\int_X f\ d\widehat{\mu} > 0$ y $\int_X f\ d\mu < +\infty$. Sea $0 < r < \int_X f\ d\widehat{\mu}$ y φ una función $\widehat{\mu}-$ simple tal que $\varphi \leq f$ y $\int_X \varphi\ d\widehat{\mu} > r$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} s_j\ \varkappa_{E_j},$$

con $s_j \in (0, +\infty)$ y $E_j \in \mathcal{C}$ disjuntos, $1 \leq j \leq n$. Fijado j, $\widehat{\mu}\,(E_j) < +\infty$ pues $\int_X f\ d\mu < +\infty$ y hay un subconjunto $\mu-$ medible F_j de E_j de modo que

$$\int_X f \, d\mu \geq \sum_{j=1}^{n} s_j \; \mu(F_j) > r.$$

Como r es arbitrario sigue la tesis. □

6.7. Sobre $\sigma-$ anillos hereditarios, medidas exteriores y subconjuntos no medibles (Lebesgue) de $\mathbb{R}$. Un conjunto de funciones integrables que se identifica con el espacio $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(i) En los apartados siguientes se consideran funciones de conjunto μ^*, definidas sobre $\sigma-$ anillos *hereditarios*[88] $\mathcal{H}$ de partes de un conjunto no vacío X. Decidir en qué casos se trata de medidas exteriores.

(i)(1) Fijado $x \in X$, para $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ y para $A \in \mathcal{H}$ es: $\mu^*(A) = 0$ si $x \notin A$ y $\mu^*(A) = 1$ si $x \in A$.

(i)(2) X es un conjunto de cien objetos dispuestos en un cuadro de diez filas y diez columnas. Sea $\mathcal{H} = \mathcal{P}(X)$ y, si $A \in \mathcal{H}$, sea $\mu^*(A)$ el número de columnas que contienen elementos de A.

(i)(3) Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si $A \in \mathcal{H}$ sea

$$\mu^*(A) = \overline{\text{lím}}_{k\to\infty} \frac{\sharp\,[A \cap \{1, ..., k\}]}{k}.$$

(i)(4) X es arbitrario, $\mathcal{H}$ la clase de partes numerables de X y $\mu^*(A) = \sharp A$.

(ii) Dadas $\{\mu_k^*\}_{k\geq 1}$ y $\{c_k\}_{k\geq 1}$, sucesiones de medidas exteriores sobre $\mathcal{H}$ y de $(0, +\infty)$ respectivamente, la función de conjunto $\mu^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \; \mu_k^*$ es una medida exterior sobre $\mathcal{H}$.

(iii) Sean $\mu_1^*, \; \mu_2^*$ medidas exteriores finitas sobre $\mathcal{P}(X)$, $\mu^* = \mu_1^* + \mu_2^*$. Sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}$ las $\sigma-$ álgebras asociadas a $\mu_1^*, \; \mu_2^*$ y μ^* por el proceso de Carathéodory respectivamente. Entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

[88] Una clase no vacía de conjuntos es *hereditaria* si contiene a los subconjuntos de cada uno de sus miembros.

(iv) Sea $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ la función definida para $A \subseteq \mathbb{R}$: $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable; $\mu^*(A) = 1$ si A es no numerable y existe un intervalo acotado I tal que $A - I$ es numerable; $\mu^*(A) = +\infty$ en los demás casos. Entonces μ^* es medida exterior. Determinar los conjuntos μ^*-medibles según el proceso de Carathéodory.

(v) Sea (X, d) un espacio métrico y c un número real fijo. Para cada subconjunto A de X se define

$$\mu_c^*(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \left\{ \inf_{\{A_k\}_{k \geq 1} \in \mathcal{P}(X):\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ \operatorname{diam}(A_k) < \varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_k))^c \right\}.$$

Probar que μ_c^* es medida exterior.

(vi) Sea m la medida de Lebesgue en en $\mathbb{R}$ y m^* la medida exterior asociada. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida exterior positiva contiene algún subconjunto no medible.

(vii) Consideremos $\mathbb{N}$ con la topología discreta, μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mu(\{n\}) = 1$ para $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $\mathcal{J}_\mu(\mathbb{N})$ de funciones integrables se identifica con el espacio $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (v. 6.19).

Solución

(i)(1) Evidentemente μ^* es medida exterior.

(i)(2) Sean $A_1,\ A_2 \in \mathcal{H}$ y $c_1, \ldots, c_{10}$ las columnas en las que podemos arreglar los elementos de X. Sean $c_{i_1}, \ldots, c_{i_{\mu^*(A_1)}}$ y $c_{j_1}, \ldots, c_{j_{\mu^*(A_2)}}$ las columnas que contienen elementos de A_1 y A_2 respectivamente. Podemos suponer $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ y que hay exactamente s columnas que contienen elementos de A_1 y de A_2. Entonces

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - s \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Inductivamente sigue que μ^* es finitamente subaditiva. Evidentemente μ^* es monótona. Como para toda parte A de X es $0 \leq \mu^*(A) \leq 10$ y $\mu^*(A) = 0$ sii $A = \emptyset$ entonces μ^* es medida exterior.

(i)(3) En este caso μ^* no es medida exterior, ya que si para cada entero positivo n es $A_n = \{n\}$ entonces $\mu^*(\cup A_n) = \mu^*(\mathbb{N}) = 1$ y, para cada n, $\mu^*(A_n) = 0$.

(ii) Evidentemente μ^* es monótona y $\mu^*(\emptyset) = 0$. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \ \mu_j^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{j=1}^{k} c_j \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_j^*\left(A_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j \ \mu_j^*\left(A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right)$$

y, por ser k arbitrario, μ^* es medida exterior.

(iii) Sea $E \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, \ A \in \mathcal{P}(X)$. Entonces

$$\mu^*(A) = \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{2} \left[\mu_i^*(A \cap E) + \mu_i^*(A - E)\right] = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E),$$

de modo que $E \in \mathcal{A}$. Por otra parte, si $F \notin \mathcal{A}_1$ existirá $B \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\mu_1^*(B) < \mu_1^*(B \cap F) + \mu_1^*(B - F)$. Por lo tanto

$$\mu^*(B) = \mu_1^*(B) + \mu_2^*(B) < \mu_1^*(B \cap F) + \mu_1^*(B - F) + \mu_2^*(B)$$

$$\leq \mu_1^*(B \cap F) + \mu_1^*(B - F) + \mu_2^*(B \cap F) + \mu_2^*(B - F)$$

$$= \mu^*(B \cap F) + \mu^*(B - F),$$

i.e. $F \notin \mathcal{A}$.

(iv) Claramente $\mu^*(\emptyset) = 0$. Sean $A, \ B$ partes no vacías de $\mathbb{R}$, $A \subseteq B$. Si B es numerable entonces A también lo es y $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 0$. Si B es no numerable y existe algún intervalo acotado I tal que $B - I$ es numerable también $A - I$ resulta numerable. Si A es numerable $\mu^*(A) = 0 < 1 = \mu^*(B)$. Si A es no numerable $\mu^*(A) = \mu^*(B) = 1$ y concluímos que μ^* es monótona. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes no vacías de $\mathbb{R}$ y veamos que $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Podemos suponer que la serie anterior es finita y que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es no numerable. Por la definición de μ^* ha de existir $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ tal que $\mu^*(A_n) = 1$ si $n \in F$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sharp F$. Además $\cup_{n\in\mathbb{N}-F} A_n$ es numerable y, para cada $n \in F$, existe un intervalo acotado J_n tal que $A_n - J_n$ es numerable. Si J es un intervalo acotado tal que $\cup_{n\in F} J_n \subseteq J$, como

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n - J \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}-F} A_n \bigcup \cup_{n\in F}(A_n - J_n)$$

el conjunto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n - J$ deviene numerable y $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 \leq \sharp F$. Por otra parte, sea $\mathcal{M}$ la $\sigma-$ álgebra de conjuntos μ^* medibles según el proceso de Carathéodory. Veamos que un conjunto no vacío E pertenece a $\mathcal{M}$ sii no hay algún intervalo L tal que $L \cap E$ y $L - E$ son no numerables. En efecto, si hubiere un tal intervalo sería

$$1 = \mu^*(L) < \mu^*(L \cap E) + \mu^*(L - E) = 2,$$

con lo que $E \notin \mathcal{M}$. Recíprocamente, si E no es medible existirá $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(C) < \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C - E)$. Necesariamente

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap E) = \mu^*(C - E) = 1,$$

$C, C \cap E$ y $C - E$ son no numerables y existe un intervalo K tal que $C - K$ es numerable. Tenemos entonces $C \subseteq K \cup N$, donde N es algún subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Como

$$C \cap E \subseteq K \cap E \cup N \cap E, \quad C - E \subseteq K - E \cup N - E$$

los conjuntos $K \cap E$ y $K - E$ son no numerables.

(v) Fijado $\varepsilon > 0$ escribiremos

$$\mu_{c,\varepsilon}^*(A) = \inf_{\{A_k\}_{k\geq 1} \in \mathcal{P}(X):\ A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ \operatorname{diam}(A_k) < \varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_k))^c,$$

con $A \subseteq X$. Notamos que $\mu_{c,\varepsilon}^*(\emptyset) = 0$ y $\mu_{c,\varepsilon}^*$ es monótona: si $A \subseteq B$ y $\{B_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de partes de X de diámetro menor que ε cuya unión es B entonces $A = \cup_{k\geq 1} A \cap B_k$ y $\operatorname{diam}(A \cap B_k) \leq \operatorname{diam}(B_k) < \varepsilon$ para todo k. Entonces

$$\mu_{c,\varepsilon}^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A \cap B_k))^c \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_k))^c$$

y, por ser $\{B_k\}_{k\geq 1}$ arbitraria, $\mu^*_{c,\varepsilon}(A) \leq \mu^*_{c,\varepsilon}(B)$. Sea $\{C_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de partes de X, $C = \cup_{n\geq 1} C_n$. Para ver que $\mu^*_{c,\varepsilon}$ es $\sigma-$ subaditiva podemos suponer que $\sum_{n\geq 1} \mu^*_{c,\varepsilon}(C_n)$ es finita. Si $\delta > 0$ para cada n hay una partición $\{C_{n,m}\}_{m\geq 1}$ de C_n por conjuntos de diámetro menor que ε tal que $\sum_{m=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(C_{n,m}))^c \leq \mu^*_{c,\varepsilon}(C_n) + 2^{-n}\delta$. Luego $\{C_{n,m}\}_{n\geq 1, m\geq 1}$ es partición de C en conjuntos de diámetro menor que ε y

$$\mu^*_{c,\varepsilon}(C) \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(C_{n,m}))^c$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*_{c,\varepsilon}(C_n) + 2^{-n}\delta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{c,\varepsilon}(C_n) + \delta.$$

Como δ es arbitrario cada $\mu^*_{c,\varepsilon}$ es medida exterior. Como $\mu^*_c = \sup_{\varepsilon>0} \mu^*_{c,\varepsilon}$ bastará probar la $\sigma-$ subaditividad de μ^*_c. Sea $\{D_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y supongamos, sin perder generalidad, que $\mu^*_c(D) > 0$, con $D = \cup_{n\geq 1} D_n$. Si $0 < \zeta < \mu^*_c(D)$ existe $\xi > \zeta$ tal que

$$\zeta < \mu^*_{c,\xi}(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{c,\xi}(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_c(D_n)$$

y, por ser ζ arbitrario, $\mu^*_c(D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_c(D_n)$.

(vi) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m^*(A) > 0$ y supongamos, sin perder genera-lidad[89], que $A \subseteq [0,1)$. Si $x,\ y \in [0,1)$ escribimos $x \dotplus y = x + y$ si $x + y < 1$ y $x \dotplus y = x + y - 1$ si $x + y \geq 1$. Por el axioma de elección, hay un subconjunto P de $[0,1)$ que contiene un representante de cada clase del espacio cociente $[0,1)/\mathbb{Q}$. Sea $\{r_n\}_{n\geq 0}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1)$ tal que $r_0 = 0$ y sea $P_n = P \dotplus r_n,\ n \geq 0$. Entonces $[0,1) = \bigcup_{n\geq 0} P_n$, donde la unión es disjunta, y por la invariancia por traslaciones de la medida exterior, $m^*(P_n) = m^*(P)$ para cada n. Necesariamente, P es no medible. Suponiendo que todo subconjunto de A es medible para cada n escribimos $E_n = A \cap P_n$. En particular, E_n es un subconjunto medible de P_n y, puesto que la operación $\dotplus$ es asociativa, $E_n \dotplus (1 - r_n) \subseteq P$. La medida

[89]Como $A = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} A \cap [m, m+1)$ y $m^*(A) > 0$, por la $\sigma-$ subaditividad de la medida exterior existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m^*(A \cap [m, m+1)) > 0$.

de Lebesgue es inva-riante por $\dot{+}-$ traslaciones (cf. [41], Ch. 3, §4, Lemma 16, pág. 63) de modo que $m\left(E_n \dot{+} (1-r_n)\right) = m\left(E_n\right)$. Sea $n \geq 0$ fijo y $m \geq 0$, $F_n = E_n \dot{+} (1-r_n)$ y $F_{nm} = F_n \dot{+} r_m$. Entonces $\{F_{nm}\}_{m\geq 0}$ es una familia disjunta de conjuntos medibles, $m\left(F_{nm}\right) = m\left(F_n\right)$ para todo m y $m\left(\cup_{m\geq 0} F_{nm}\right) = \sum_{m\geq 0} m\left(F_n\right) \leq 1$, de modo que $m\left(F_n\right) = 0$. Luego $m\left(E_n\right) = 0$ para todo n y resulta $m^*(A) = 0$, lo cual no es cierto.

(vii) Sea $u \in \mathcal{J}_\mu(\mathbb{N})$, i.e. $\mu_*(u)$ y $\mu^*(u)$ son iguales y finitas. Hay una función $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con soporte finito tal que $\mu^*\left(|u-v|\right) \leq 1$ (cf. [11], Ch. XIII, §7, 13.7.2, page 121). Como $|u-v|$ es continua y acotada inferiormente deducimos que $\langle w, \mu\rangle \leq 1$ toda vez que w es una función de soporte finito y $w \leq |u-v|$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v(n) = 0$ si $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$. Definimos $w_p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $w_p(n) = |u(n)|$ si $n_0 < n \leq p + n_0$ y $w_p(n) = 0$ en otro caso. En consecuencia

$$\langle w_p, \mu\rangle = \int_{\mathbb{N}} w_p(n)\ d\mu\left(n\right) = \sum_{n=n_0+1}^{p+n_0} \left|u\left(n\right)\right| \leq 1$$

y, como p es arbitrario, $u \in l^1\left(\mathbb{N}, \mathbb{R}\right)$. Recíprocamente, dado $\varepsilon > 0$ sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>n_1} \left|u\left(n\right)\right| \leq \varepsilon$. Definimos $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $s(n) = u(n)$ si $1 \leq n \leq n_1$, $s(n) = 0$ en otro caso. Si $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tiene soporte finito y $t \leq |u-s|$ obtenemos

$$\langle t, \mu\rangle = \int_{\mathbb{N}} t(n)\ d\mu\left(n\right)$$

$$= \left(\sum_{n:\ t(n)\neq 0,\ 1\leq n\leq n_1} + \sum_{n:\ t(n)\neq 0,\ n>n_1}\right) t\left(n\right) \leq \sum_{n>n_1} \left|u\left(n\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Como t es arbitraria $\mu^*\left(|u-s|\right) \leq \varepsilon$ y $u \in \mathcal{J}_\mu\left(\mathbb{N}\right)$. $\Box$

6.8. Un espacio de medida asociado a una colección dada.

Sea $\{(X_a,\ \mathcal{B}_a,\ \mu_a)\}_{a\in A}$ una colección de espacios de medida, donde $\{X_a\}_{a\in A}$ es una familia disjunta. Consideramos $(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$, donde

$$X = \cup_{a\in A} X_a,$$

$$\mathcal{B} = \{Y \in \mathcal{P}(X) : \ (\forall a \in A),\ X_a \cap Y \in \mathcal{B}_a\},$$

$$\mu(Y) = \sum_{a\in A} \mu_a(X_a \cap Y), \quad Y \in \mathcal{B}.$$

(i) $(X,\ \mathcal{B},\ \mu)$ es un espacio de medida.

(ii) μ es $\sigma-$ finita si y solo si, salvo una cantidad numerable de μ_a's $\sigma-$ finitas, las demás son nulas.

Solución

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Si $Y \in \mathcal{B}$ y $a \in A$ entonces $X_a \cap (X - Y) = X_a - X_a \cap Y$ pertenece a $\mathcal{B}_a$, de modo que $X - Y \in \mathcal{B}$. Si $(Y_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ también $(\cup_{n=1}^{\infty} Y_n) \cap X_a = \cup_{n=1}^{\infty}(Y_n \cap X_a)$ pertenece a $\mathcal{B}_a$ y, por ser a arbitrario, $\cup_{n=1}^{\infty} Y_n \in \mathcal{B}$, i.e. $\mathcal{B}$ es una $\sigma-$ álgebra. Evidentemente $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Con la notación anterior, si $(Y_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{B}$ podemos escribir[90]

$$\mu\left(Y_1 \cup Y_2\right) = \sum_{a\in A} \mu_a\left(\left(Y_1 \cup Y_2\right) \cap X_a\right) \tag{185}$$

$$= \sum_{a\in A} \left[\mu_a\left(Y_1 \cap X_a\right) + \mu_a\left(Y_2 \cap X_a\right)\right] = \mu\left(Y_1\right) + \mu\left(Y_2\right).$$

Por (185) vemos que μ es finitamente aditiva y observando su monotonía, si $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ tenemos

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{m} Y_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu\left(Y_n\right) \leq \mu\left(Y\right)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(Y_n\right) \leq \mu\left(Y\right)$. Notar que si $\mu\left(Y\right) = +\infty$ entonces para cada $r \in \mathbb{N}$ existe $A_r \in \mathcal{P}_f\left(A\right)$ tal que

$$r \leq \sum_{a\in A_r} \mu_a\left(Y \cap X_a\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a\in A_r} \mu_a\left(Y_n \cap X_a\right).$$

[90]Sean $\{s_i\}_{i\in I}$ y $\{t_i\}_{i\in I}$ subfamilias de $[0, +\infty]$, $s = \sum_{i\in I} s_i$, $t = \sum_{i\in I} t_i$. Entonces

$$\sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right) = \sum_{i\in I} s_i + \sum_{i\in I} t_i. \tag{183}$$

La identidad (183) es inmediata si algún sumando es no finito. Si suponemos que todos los sumandos son finitos, como (183) se verifica cuando las sumas son finitas resulta válida la desigualdad $\leq$. Bastará ver que

$$\sum_{i\in I} s_i + \sum_{i\in I} t_i \leq \sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right). \tag{184}$$

Podemos suponer que el miembro derecho en (184) es finito. Si $F,\ G \in \mathcal{P}_f(I)$ entonces

$$\sum_{i\in F} s_i + \sum_{j\in G} t_j = \sum_{k\in F\cap G} \left(s_k + t_k\right) + \sum_{i\in F-G} s_i + \sum_{j\in G-F} t_j$$

$$\leq \sum_{k\in F\cap G} \left(s_k + t_k\right) + \sum_{k\in F\triangle G} \left(s_k + t_k\right)$$

$$= \sum_{k\in F\cup G} \left(s_k + t_k\right) \leq \sum_{i\in I} \left(s_i + t_i\right)$$

y concluímos la validez de (184).

Más aún, para cada $r \in \mathbb{N}$ existe $k_r \in \mathbb{N}$ tal que

$$r \leq \sum_{n=1}^{k_r} \sum_{a \in A_r} \mu_a (Y_n \cap X_a) \leq \sum_{n=1}^{k_r} \mu (Y_n)$$

resultando $\sum_{n=1}^{\infty} \mu (Y_n) = +\infty$ y podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu (Y_n)$ y $\mu (Y)$ son finitos. Si $\varepsilon > 0$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu (Y_n) \leq \varepsilon$. Entonces

$$\varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu (Y_n) - \sum_{n=1}^{n_0} \mu (Y_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu (Y_n) - \mu (\cup_{n=1}^{n_0} Y_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu (Y_n) - \mu (Y)$$

y, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, μ es $\sigma-$ aditiva.

(ii) Sea $\left\{ \widetilde{X}_n \right\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ sucesión disjunta de conjuntos de medida finita tal que $\cup_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n = X$, $\widetilde{A} = \{a \in A : \ \mu_a \neq 0\}$. Entonces $\widetilde{A} \subseteq \cup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$, donde $A_{n,m} = \left\{ a \in A : \ \mu_a \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right) \geq 1/m \right\}, \quad n, m \in \mathbb{N}$. Como $\mu \left(\widetilde{X}_n \right) \geq \sum_{a \in \cup_m A_{n,m}} \mu_a \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right)$, $A_{n,m}$ debe ser finito para cada $n, m \in \mathbb{N}$. Así $\widetilde{A}$ es numerable y si $a \in \widetilde{A}$ tenemos

$$\cup_{n=1}^{\infty} \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right) = X_a, \quad \mu_a \left(X_a \cap \widetilde{X}_n \right) \leq \mu \left(\widetilde{X}_n \right) < +\infty$$

y μ_a es $\sigma-$ finita. La suficiencia es inmediata. $\square$

6.9. Caracterización de funciones medibles sobre espacios de medida completa. Completación de espacios de medida.

(i) Si $(X, \ \Sigma, \ \mu)$ es un espacio de medida, hay un espacio de medida completa $(X, \ \Sigma^c, \ \mu^c)$ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^c$, μ^c extiende a μ y todo elemento $E \in \Sigma^c$ es de la forma $E = F \cup W$, donde $F \in \Sigma$ y W es parte de algún conjunto de Σ de $\mu-$ medida nula.

(ii) Si $(X,\ \Sigma,\ \mu)$ es un espacio de medida completa, $f,\ g$ son funciones de X en $\overline{\mathbb{R}}$, f es $\mu-$ medible y $f = g$ a.e. μ entonces g es $\mu-$ medible. Este resultado es, en general, falso.

(iii) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, f es μ^c- medible sii existe $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ función $\mu-$ medible y un conjunto $E \in \Sigma$ tal que $\mu(X - E) = 0$ y $f\mid_E = g\mid_E$.

Solución

(i) La clase Σ^c de conjuntos del tipo $E = F \cup W$, donde $F \in \Sigma$ y Z es parte de algún conjunto de Σ de $\mu-$ medida nula, contiene a $\emptyset$. Sea $E_i = F_i \cup W_i$, con $F_i \in \Sigma$ y $W_i \subseteq Z_i$ y $\mu(Z_i) = 0$ en Σ, $i = 1,\ 2$. Podemos escribir $E_1 - E_2 = F_3 \cup W_3$, donde

$$F_3 = F_1 - (F_2 \cup Z_2),$$

$$W_3 = (F_1 - F_2) \cap (Z_2 - W_2) \cup W_1 - (F_2 \cup W_2).$$

Entonces $F_3 \in \Sigma$, $W_3 \subseteq Z_1 \cup Z_2$ y $Z_1 \cup Z_2 \in \Sigma$ tiene medida nula, i.e. $E_1 - E_2 \in \Sigma^c$. Evidentemente $(X,\ \Sigma^c,\ \mu^c)$ es espacio de medida completa.

(ii) Si Z es la parte de X sobre la que $f \neq g$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\{g < \alpha\} = \{g < \alpha\} \cap Z \cup \{g < \alpha\} - Z.$$

El conjunto $\{g < \alpha\} - Z \in \Sigma$, pues

$$\{g < \alpha\} - Z = \{f < \alpha\} - Z,$$

$\{f < \alpha\} \in \Sigma$ por la medibilidad de f, $Z \in \Sigma$ por tener medida nula y Σ es cerrada por diferencias. Además $\{g < \alpha\} \cap Z \in \Sigma$ por la completitud de la medida y, por lo tanto, $\{g < \alpha\} \in \Sigma$. Como α es arbitrario g es medible. En particular, sea

$$X = \{a, b, c\}, \quad \Sigma = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b, c\},\ X\},$$

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{b, c\}) = 0,\ \mu(\{a\}) = \mu(X) = 1.$$

Como $\{b\} \notin \Sigma$, $\{b\} \subseteq \{b,c\}$ y $\mu(\{b,c\}) = 0$ entonces (X, Σ, μ) es un espacio de medida no completa. La función $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $g(a) = 0$, $g(b) = -g(c) = 1$ es no medible, pues $\{g > 0\} = \{b\}$ y $\{b\} \notin \Sigma$. Si $f \equiv 0$ es la función idénticamente nula entonces f es medible y $\{f \neq g\} = \{b,c\}$ tiene $\mu-$ medida cero, i.e. $f = g$ a.e. μ.

(iii) Si $r \in \mathbb{Q}$ y f es μ^c- medible podemos escribir $\{f < r\} = E_r \cup W_r$, con $E_r \in \Sigma$ y W_r contenido en algún conjunto $Z_r \in \Sigma$ de medida nula. Análogamente, $\{f = +\infty\} = E_{+\infty} \cup W_{+\infty}$ donde $E_{+\infty} \in \Sigma$ y $W_{+\infty}$ es parte de algún conjunto $Z_{+\infty} \in \Sigma$ de medida nula. Si $E = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}} E_r$ y $Z = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}} Z_r$ entonces $X = E \cup Z$ y $\mu(Z) = 0$. Definimos $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $g\mid_E = f$ y $g\mid_Z \equiv +\infty$. Tenemos $E, Z \in \Sigma$ y $\mu(X - E) = 0$ pues $X - E \subseteq Z$. Además, si $-\infty < s \leq +\infty$ y $(r_n)_{n \in \mathbb{Q}}$ es una sucesión creciente convergente a s entonces

$$\{g < s\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{g < r_n\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{g < r_n\} \cap E = \cup_{n=1}^{\infty} \{f < r_n\},$$

i.e. $\{g < s\} \in \Sigma$. Finalmente,

$$\{g = -\infty\} = \cap_{r \in \mathbb{Q}} \{g < r\} = \cap_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\}$$

y $\{g = -\infty\} \in \Sigma$ porque Σ es $\sigma-$ álgebra. Concluímos que g es $\mu-$ medible y la condición es necesaria. La suficiencia sigue de (ii). □

6.10. Sobre sucesiones decrecientes de medidas.

Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio de medida y $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de medidas sobre $\mathcal{B}$. Entonces $\mu = \lim_{n \to +\infty} \mu_n$ es una medida, siendo este resultado falso, en general, para sucesiones decrecientes.

Solución

Evidentemente μ está bien definida, es no negativa, monótona y finitamente aditiva. Sea $\{E_m\}_{m \geq 1}$ una sucesión disjunta en $\mathcal{B}$ y $E = \cup_{m \geq 1} E_m$. Entonces

$$\mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(E) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} \mu_n\left(\cup_{m=1}^{p} E_m\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} \sum_{m=1}^{p} \mu_n(E_m) \leq \lim_{p \to +\infty} \sum_{m=1}^{p} \mu(E_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m).$$

Podemos suponer que $\mu(E) < +\infty$ y que $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) > \delta$, $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=1}^{p} \mu(E_m) > \delta$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ es

$$\delta < \sum_{m=1}^{p} \mu_n(E_m) = \mu_n(\cup_{m=1}^{p} E_m) \leq \mu(\cup_{m=1}^{p} E_m) \leq \mu(E)$$

y, como δ es arbitrario, μ es una medida. Ahora sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ y, para $n \in \mathbb{N}$ e $I \in \mathcal{P}(X)$, $\mu_n(I) = \natural(I \cap \{1, \ldots, n\})/n$. $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de medidas sobre X pero $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$ no es medida. En efecto, sea $I_{2n-1} = \{2n-1, 2n\}$, $n \geq 1$. Entonces $\{I_{2n-1}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión disjunta de partes de X,

$$\cup_{n\geq 1} I_{2n-1} = X, \ \mu(X) = 1 \ \ y \ \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_{2n-1}) = +\infty. \ \square$$

6.11. Primer principio de Littlewood o caracterización de subconjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Son equivalentes[91]:

(i) E es medible.

(ii) Dado $\varepsilon > 0$ hay un abierto O tal que $O \supseteq E$ y $m^*(O - E) < \varepsilon$, donde m^* indica la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

(iii) Dado $\varepsilon > 0$ hay un cerrado $C \subseteq E$ tal que $m^*(E - C) < \varepsilon$.

(iv) Hay un conjunto G de tipo G_δ tal que $E \subseteq G$ y $m^*(G - E) = 0$.

[91] Con referencia a la teoría de funciones de una variable real J. E. Littlewood señalaba: ¨*The extent of knowledge required is nothing like so great as is sometimes supposed. There are three principles, roughly expressible in the following terms: Every (measurable) set is nearly a finite union of intervals; every (measurable) function is nearly continuous; every convergent sequence of (measurable) functions is nearly uniformly convergent. Most of the results of the theory are fairly intuitive applications of these ideas, and the student armed with them should be equal to most occasions when real variable theory is called for. If one of the principles would be the obvious means to settle the problem if it were* quite *true, it is natural to ask if the* nearly *is near enough, and for a problem that is actually solvable it generally is* ¨. En este problema se establece el primer principio de Littlewood; el segundo en el Problema 6.12 en dos formas, una de ellas el teorema de Lusin. El tercer principio es el conocido Teorema de Egoroff (cf. [19], Ch. IV, Sec. 21, Th. A, page 88).

(v) Hay un conjunto F de tipo F_σ tal que $F \subseteq E$ y $m^*(E-F)=0$.

Si $m^*(E) < +\infty$ las afirmaciones anteriores son equivalentes a

(vi) Dado $\varepsilon > 0$ hay un conjunto U, que es union finita de intervalos abiertos, tal que $m^*(U \vartriangle E) < \varepsilon$.

Solución

$[(i) \Rightarrow (ii)]$ Sea E medible de medida finita, $\varepsilon > 0$. Existe una sucesión de intervalos $\{I_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ tal que $E \subseteq \cup_{\nu=1}^\infty I_\nu$ y $\sum_{\nu=1}^\infty \operatorname{long}(I_\nu) < m(E)+\varepsilon/2$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Si I_ν tiene extremos $a_\nu,\ b_\nu$, con $a_\nu < b_\nu$, el conjunto $O = \cup_{\nu=1}^\infty \left(a_\nu - \varepsilon 2^{-\nu-2}, b_\nu + \varepsilon 2^{-\nu-2}\right)$ es abierto, contiene a E y

$$m(O) \leq \sum_{\nu=1}^\infty \left(\operatorname{long}(I_\nu) + \varepsilon 2^{-\nu-1}\right) = \sum_{\nu=1}^\infty \operatorname{long}(I_\nu) + \varepsilon/2 < m(E) + \varepsilon.$$

En consecuencia, como E tiene medida finita,

$$\varepsilon > m(O) - m(E) = m(O-E).$$

$[(ii) \Leftrightarrow (vi)]$ Asumiendo (ii), $O \vartriangle E = O - E$ pues $O \supseteq E$. Como O es abierto se realiza como unión numerable disjunta de intervalos abiertos y basta observar la monotonía de la medida exterior. Recíprocamente, si $m^*(E) < +\infty$ existe un abierto O de medida finita que contiene a E. Sea U union finita de intervalos abiertos, tal que $m^*(U \vartriangle E) < \varepsilon/2$. Indicando

$$\Lambda_1 = (U \triangle E) \cap O,\ \Lambda_2 = (U \cap O \cup \Lambda_1) - E.$$

obtenemos

$$m^*(\Lambda_1) \leq m^*(U \vartriangle E) < \varepsilon/2, \quad m^*(\Lambda_2) \leq m^*(U \triangle E) + m^*(\Lambda_1 - E) < \varepsilon.$$

Como $E \subseteq U \cap O \cup \Lambda_1$ resulta $E = (U \cap O \cup \Lambda_1) - \Lambda_2$. Análogamente, para $n \in \mathbb{N}$ hay conjuntos $S_n,\ \Lambda_{n,1},\ \Lambda_{n,2}$ tales que $E = (S_n \cup \Lambda_{n,1}) - \Lambda_{n,2}$, S_n es unión finita de intervalos abiertos y tanto $\Lambda_{n,1}$ como $\Lambda_{n,2}$ tienen medida exterior menor que $1/n$. Si O_n es abierto que contiene a $\Lambda_{n,1}$ y $m^*(O_n) < 1/n$ escribimos $G = \cap_{n \in \mathbb{N}} (S_n \cup O_n)$. Ahora G es de tipo G_δ, contiene a E y para cada n es

$$m^*(G-E) \leq m^*(S_n - E) + m^*(O_n - E) \leq m^*(\Lambda_{n,2}) + 1/n < 2/n,$$

i.e. $G-E$ tiene medida nula. E resulta medible pues $E=G-(G-E)$.

En general, $[(i) \Rightarrow (ii)]$: Sea E medible de medida infinita, $\varepsilon > 0$. Por la σ - finitud de la medida, podemos escribir $E=\cup_{n=1}^{\infty} E_n$, con cada E_n medible de medida finita. Hay conjuntos abiertos O_n tales que $O_n \supseteq E_n$ y $m\left(O_n - E_n\right) < \varepsilon 2^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia el conjunto $O=\cup_{n=1}^{\infty} O_n$ es abierto, contiene a E y

$$m(O-E)=m\left[\cup_{n=1}^{\infty} O_n - E_n\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(O_n - E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n-1} = \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

$[(ii) \Rightarrow (iv)]$ Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe G_n abierto tal que $G_n \supseteq E$ y $m^*\left(G_n - E\right) < 2^{-n}$. El conjunto $G=\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es G_δ, contiene a E y para cada n es

$$m^*(G-E) \leq m^*\left(G_n - E\right) < 2^{-n},$$

de donde sigue (iv). Ahora:

$[(iv) \Rightarrow (i)]$ Podemos escribir $E=G-(G-E)$, G es medible por ser G_δ, $G-E$ es medible por tener medida nula y ser completa la medida de Lebesgue.

$[(i) \Rightarrow (iii)]$ Si E es medible también lo es $\mathbb{R}-E$. Como $[(i) \Leftrightarrow (ii)]$, dado $\varepsilon>0$ existe O abierto tal que $O \supseteq \mathbb{R}-E$ y $m[O-(\mathbb{R}-E)] < \varepsilon$. Escribiendo $C=\mathbb{R}-O$ entonces C es un subconjunto cerrado de E y

$$m(E-C)=m[O-(\mathbb{R}-E)] < \varepsilon.$$

$[(iii) \Rightarrow (v)]$ Por hipótesis, para $n \in \mathbb{N}$ hay un cerrado $F_n \subseteq E$ tal que $m^*\left(E-F_n\right) < 2^{-n}$. El conjunto $F=\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ es un subconjunto F_σ de E y

$$m^*(E-F) \leq m^*\left(E-F_n\right) < 2^{-n}$$

para todo n, siguiendo (v). Ahora:

$[(v) \Rightarrow (i)]$ Podemos escribir $E=F \cup (E-F)$, F es medible por ser F_σ, $E-F$ es medible por tener medida nula y ser completa la medida de Lebesgue. □

6.12. Teorema de Lusin y segundo principio de Littlewood.

Sea $f:[a,b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función medible (Lebesgue), finita a.e..

(i) Dado $\varepsilon > 0$ existe M tal que $|f| \leq M$ salvo un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$.

(ii) Hay una función simple φ tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ excepto donde $|f(x)| \geq M$. Si $m \leq f \leq M$ entonces podemos seleccionar φ tal que $m \leq \varphi \leq M$.

(iii) Si φ es una función simple sobre $[a, b]$ hay una función de salto g sobre $[a, b]$ tal que $g(x) = \varphi(x)$ salvo un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$. Si $m \leq \varphi \leq M$ podemos seleccionar g tal que $m \leq g \leq M$.

(iv) Dada una función de salto g sobre $[a, b]$ hay una función continua h tal que $g(x) = h(x)$ salvo un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$. Si $m \leq g \leq M$ podemos seleccionar g tal que $m \leq h \leq M$.

(v) Hay funciones g de saltos y h continua sobre $[a, b]$ tales que $|f - g| \leq \varepsilon$ y $|f - h| \leq \varepsilon$ salvo conjuntos de medida menor que $\varepsilon/3$. Estas funciones pueden ser tales que $m \leq g \leq M$ y $m \leq h \leq M$ si $m \leq f \leq M$.

(vi) (Teorema de Lusin) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, hay una función continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $m\left(\{x \in [a, b] : \; f(x) \neq g(x)\}\right) < \delta$.

Solución

(i) Por hipótesis el conjunto

$$\{x \in [a, b] : \; |f(x)| = +\infty\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, b] : \; |f(x)| > n\}$$

tiene medida de Lebesgue nula, y puesto que $[a, b]$ tiene medida finita tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \; m(\{x \in [a, b] : \; |f(x)| > n\}) = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe entonces M tal que

$$m(\{x \in [a, b] : \; |f(x)| > M\}) \leq \varepsilon/3.$$

(ii) Consideremos un número positivo N mayor que el valor M anterior. Si $f \geq 0$ a.e. escribimos

$$\varphi_n = N \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \, \chi_{\left\{x \in [a,b]: \; \frac{(k-1)N}{2^n} \leq f(x) < \frac{kN}{2^n}\right\}}, \; n \geq 1.$$

Las funciones anteriores son simples y $0 \leq \varphi_n \leq f$ para cada n. Por otra parte, $0 \leq f - \varphi_n \leq N/2^n$ para todo n sobre $f^{-1}\{[0,N)\}$. En general, escribimos $f = f^+ - f^-$ y, nuevamente, dado $\varepsilon > 0$ hay funciones simples φ^+ y φ^- tales que $0 \leq f^+ - \varphi^+ \leq \varepsilon/2$ y $0 \leq f^- - \varphi^- \leq \varepsilon/2$ sobre $(f^+)^{-1}\{[0,N)\} \cap (f^+)^{-1}\{[0,N)\}$. [92] Entonces

$$\left|f - (\varphi^+ - \varphi^-)\right| \leq \left(f^+ - \varphi^+\right) + \left(f^- - \varphi^-\right) \leq \varepsilon$$

excepto cuando $|f| \geq N$, esto es, fuera de un conjunto de medida menor que $\varepsilon/3$. Es claro el resto.

(iii) Consideremos una función simple $\varphi = \sum_{p=1}^{P} \alpha_p \chi_{E_p}$. Dado $\varepsilon > 0$ para cada $p = 1, \dots, P$ hay un conjunto U_p, el que es unión disjunta de intervalos, de modo que $m(E_p \triangle U_p) \leq \varepsilon/(3P)$ (V. Problema 6.11, (vi)). La función $g = \sum_{p=1}^{P} \alpha_p \chi_{U_p}$ es una función de saltos y

$$m(\{g \neq \varphi\}) \leq \sum_{p=1}^{P} m(E_p \triangle U_p) \leq \varepsilon/3$$

y sigue (iii).

(iv) Sea $g = \sum_{k=1}^{s} \beta_k \chi_{I_k}$ una función de salto. Evidentemente podemos suponer $s > 1$ y que los intervalos $I_1, \dots, I_s$ están ordenados de manera que I_k está a la izquierda de I_{k+1} si $1 \leq k < s$. También escribimos $\beta_k = 0$ si $I_k \subseteq g^{-1}(\{0\})$ y tenemos $[a,b] = \cup_{k=1}^{s} I_k$. Si $1 < k < s$ consideramos intervalos $J_k = [a_k, b_k]$ centrados en el punto medio de I_k de modo que $m(I_k - J_k) < \varepsilon/(3s)$. Además consideramos $b_1 \in I_1$, $a_s \in I_s$ tales que $b_1 > \sup\, I_1 - \varepsilon/(3s)$, $a_s < \inf\, I_s + \varepsilon/(3s)$, y escribimos $J_1 = [a, b_1]$, $J_s = [a_s, b]$. Definimos

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in \cup_{k=1}^{s} J_k \\ \frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{a_k - b_{k-1}}(x - b_{k-1}) + \beta_{k-1} & si \quad b_{k-1} \leq x \leq a_k,\ 2 \leq k \leq s. \end{cases}$$

[92] Notar que $\{x \in [a,b] : |f(x)| < N\} \subseteq (f^+)^{-1}\{[0,N)\} \cap (f^-)^{-1}\{[0,N)\}$.

Entonces h es continua y si inf $I_k = x_{k-1}$ y sup $I_k = x_k$, $1 \leq k \leq s$, tenemos

$$m\{h \neq g\} \leq \sum_{k=2}^{s} (a_k - b_{k-1}) = a_s - b_1 + \sum_{k=2}^{s-1} (a_k - b_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} [(a_k - x_{k-1}) + (x_k - b_k)] + \sum_{k=2}^{s-1} (x_{k-1} - x_k) - x_1 + x_{s-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} m(I_k - J_k) < \varepsilon/3.$$

Claramente sigue entonces (iv).

(v) Sigue de los puntos anteriores.

(vi) Si $n \in \mathbb{N}$ sea $h_n \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ tal que $m(\{|f - h_n| \geq 2^{-n}\}) \leq 2^{-n}$. Si L es el conjunto de puntos x de $[a,b]$ en los que $\{h_n(x)\}_{n\geq 1}$ no converge a $f(x)$ podemos escribir

$$L = \cup_{i=1}^{\infty} \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}. \tag{186}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$m\left(\cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}\right) = \lim_{j\to+\infty} m\left(\cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}\right), \tag{187}$$

pues estamos trabajando con conjuntos medibles de medida finita. Si $k \geq j \geq \log_2 i$ es $\{|f - h_k| \geq 1/i\} \subseteq \left\{|f - h_k| \geq 2^{-k}\right\}$ para cada k, i.e.

$$m\left(\cup_{k=j}^{\infty} \{|h_k - f| \geq 1/i\}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} m(\{|h_k - f| \geq 1/i\}) \tag{188}$$

$$\leq \sum_{k=j}^{\infty} m\left(\left\{|f - h_k| \geq 2^{-k}\right\}\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} 2^{-k}.$$

Por (187) y (188) resulta $m\left(\cap_{j=1}^{\infty}\cup_{k=j}^{\infty}\{|h_k - f| \geq 1/i\}\right) = 0$ para cada i y, por (186), $f = \lim_{n\to+\infty} h_n$ a.e.. Por el teorema de Egoroff, dado $\delta > 0$ hay un subconjunto medible A de $[a,b]$ de medida menor que $\delta/2$ al exterior del cual $h_n \xrightarrow{o} f$. Por el Problema 6.11 hay un cerrado $B \subseteq [a,b]-A$ tal que $m([a,b]-(A\cup B)) < \delta/2$. Por ser límite uniforme de funciones continuas $f\mid_C$ es continua. Existe $g \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ tal que $g\mid_C = f$, la cual puede construirse observando que $[a,b]-B$ es abierto. Por ello, hay un abierto U en $\mathbb{R}$ tal que $[a,b]-B = U \cap [a,b]$. Hay además intervalos abiertos disjuntos, en cantidad numerable, cuya unión es U. Podemos definir g de forma que coincide con f sobre B y cuya gráfica consiste de los segmentos que unen las imágenes, por f, de los extremos de los intervalos que componen U en $[a,b]$. Finalmente, como

$$\{f \neq g\} \subseteq [a,b] - B \subseteq A \cup [a,b] - (A \cup B)$$

tenemos

$$\begin{aligned} m(\{f \neq g\}) &\leq m(A \cup [a,b] - (A\cup B)) \\ &\leq m(A) + m([a,b]-(A\cup B)) < \delta \end{aligned}$$

y sigue la tesis. □

6.13. Cada función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue es idéntica a.e. a una función medible Borel. Sobre acotación y convergencia uniforme de sucesiones de funciones medibles, finitas y convergentes a.e., definidas en subconjuntos medibles de la recta real de medida positiva. Sucesiones convergentes en espacios de funciones esencialmente acotadas. Si (X,Σ,μ) es espacio de medida finita, $f_n \to f$ a.e. en $L^p(X,\Sigma,\mu)$ y $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ resulta $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(0 < p < \infty)$.

(i) Toda función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue es idéntica a.e. a una función medible Borel.

(ii) Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles, finitas a.e., definidas sobre un subconjunto medible E de $\mathbb{R}$ de medida positiva, de modo que existe $\lim_{n\to+\infty} f_n$ a.e.. Existe un subconjunto medible F de E de medida positiva tal que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es acotada sobre F.

(iii) Sea (X, Σ, μ) espacio de medida $\sigma-$ finita, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones finitas a.e. que converge a una función finita f. Existe una sucesión de conjuntos medibles $\{E_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\mu\left(E - \cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ en cada E_n.

(iv) En un espacio de medida (X, Σ, μ), una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ converge a una función $f \in L^{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ sii $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ a.e..

(v) Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita, $0 < p < +\infty$, $f_n \to f$ a.e. en $L^p(X, \Sigma, \mu)$, $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Entonces $\|f_n - f\|_p \to 0$. [93]

Solución

(i) Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible Lebesgue y dados $r,\ s \in \mathbb{Q},\ r < s$, sea $E_{r,s} = \{r < f < s\}$. Como $E_{r,s}$ es medible Lebesgue existe un conjunto $G_{r,s}$ de tipo G_δ que lo contiene tal que el conjunto $N_{r,s} = G_{r,s} - E_{r,s}$ tiene medida nula. En consecuencia, el conjunto $N = \cup_{r<s,\ r,s\in\mathbb{Q}} N_{r,s}$ tiene medida nula y, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un boreliano B_n de medida de Lebesgue menor que $1/n$ tal que $B_n \supseteq N$. El conjunto $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ es boreliano, tiene medida nula y contiene a N. La función $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g = f\ \varkappa_{\mathbb{R}-B}$ es igual a.e. a f y es boreliana. En efecto, sean $x < y$ en

[93] V. también Problema 3.30 (vi). Si H es espacio de Hilbert, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en H, $f \in H$, $f_n \underset{\rightarrow}{w} f$ y $\|f_n\| \to \|f\|$ es inmediato que $f_n \to f$ en H (cf. [29]).

$\mathbb{R}$ y veamos que $\{x < g < y\}$ es boreliano. Tenemos

$$\{x < g < y\} = \{x < g < y\} \cap B \cup \{x < g < y\} - B,$$

$$\{x < g < y\} \cap B = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \notin (x, y), \\ B & si \quad 0 \in (x, y), \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \{x < g < y\} - B &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} \{r < g < s\} - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} \{r < f < s\} - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} E_{r,s} - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} (G_{r,s} - N_{r,s}) - B \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} G_{r,s} - (N_{r,s} \cup B) \\ &= \cup_{x<r<s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}} G_{r,s} - B \end{aligned}$$

y sigue la afirmación.

(ii) El conjunto

$$Z = \{x \in E : \exists n,\ n \geq 1/\ f_n(x) = \infty\} \cup \left\{x \in E : \ (-\exists) \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right\}$$

tiene medida nula. Podemos escribir

$$E - Z = \cup_{p=1}^{\infty} \{x \in E - Z : \ (\forall n)\ |f_n(x)| \leq p\}.$$

Como $E - Z$ tiene medida positiva algún miembro de la unión anterior, necesariamente medible, ha de tener medida positiva.

(iii) Suponiendo válida la afirmación para espacios de medida finita, si E tiene medida no finita escribimos $E = \cup_{m=1}^{\infty} \widetilde{E_m}$, donde cada $\widetilde{E_m}$ es medible y de medida finita. Fijado m hay una sucesión $\left\{\widetilde{E}_{m,p}\right\}_{p\geq 1}$

de subconjuntos medibles de $\widetilde{E_m}$ tal que $\mu\left(\widetilde{E_m} - \cup_{p=1}^{\infty}\widetilde{E}_{m,p}\right) = 0$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre cada $\widetilde{E}_{m,p}$. Por lo tanto

$$\mu\left(E - \cup_{m,p}\widetilde{E}_{m,p}\right) = \mu\left(\cup_{m=1}^{\infty}\left(\widetilde{E_m} - \cup_{p=1}^{\infty}\widetilde{E}_{m,p}\right)\right) = 0$$

y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre $\widetilde{E}_{m,p}$. Supondremos entonces que E tiene medida finita. Aplicando sucesivamente el teorema de Egoroff: hay un subconjunto medible A_1 de E tal que $\mu(A_1) < 1$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre el conjunto $E_1 = E - A_1$. Hay un conjunto $A_2 \in \Sigma$ contenido en A_1 tal que $\mu(A_2) < 1/2$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre el conjunto $E_2 = A_1 - A_2$. Inductivamente se definen entonces sucesiones $\{A_i\}_{i\geq 0}$, $\{E_j\}_{j\geq 1}$ de conjuntos medibles, donde $A_0 = E$, $E_j = A_{j-1} - A_j$ si $j \geq 1$, $\mu(A_i) < 1/i$ si $i \geq 1$ y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre cada E_j. Finalmente, basta observar que para todo n resulta

$$\mu\left(E - \cup_{j=1}^{\infty}E_j\right) \leq \mu\left(E - \cup_{j=1}^{n}E_j\right)$$

$$= \mu\left(E - (E - A_n)\right) = \mu(A_n) < 1/n,$$

y sigue la tesis.

(iv) La condición es claramente suficiente. Por otra parte, si $\|f_n - f\|_{\infty} \to 0$ para cada entero positivo p existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_p$ entonces $\|f_n - f\|_{\infty} < 1/p$. Luego el conjunto $Z = \cup_{p=1}^{\infty}\cup_{n=n_p}^{\infty}\{|f_n - f| \geq 1/p\}$ tiene medida nula y $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre $X - Z$.

(v) Dado $\varepsilon > 0$, si $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f|^p \, d\mu < \varepsilon$ si $E \in \Sigma$ y $\mu(E) < \delta$. Como X tiene medida finita, por el teorema de Egoroff existe $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \delta$, tal que $f_n \underset{\rightarrow}{o} f$ sobre $X - A$. Por el lema de Fatou tenemos

$$\underline{\text{lím}}_{n\to+\infty}\int_{X-A}|f_n|^p \, d\mu \geq \int_{X-A}|f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \, d\mu - \int_A |f|^p \, d\mu,$$

de donde deducimos

$$\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty}\int_A |f_n|^p \, d\mu \leq \int_X |f|^p \, d\mu - \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty}\int_{X-A}|f_n|^p \, d\mu \qquad (189)$$

$$\leq \int_A |f|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Por otra parte, si $\gamma_p = \text{máx}\{1,\ 2^{p-1}\}$ es válida la desigualdad[94]

$$|\alpha - \beta|^p \leq \gamma_p\ (|\alpha|^p + |\beta|^p)\,,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}. \tag{190}$$

Si $n \in \mathbb{N}$ la función $F_n = \gamma_p\ (|f|^p + |f_n|^p) - |f - f_n|^p$ es medible y no negativa. Por el lema de Fatou escribimos

$$2\gamma_p \int_A |f|^p\, d\mu \leq \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A F_n d\mu \tag{191}$$

$$= \gamma_p \int_A |f|^p\, d\mu + \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A (\gamma_p\, |f_n|^p - |f - f_n|^p)\, d\mu.$$

[94]Por la homogeneidad de la inecuación (190), bastará ver la desigualdad siguiente:

$$\frac{|1+z|^p}{1+|z|^p} \leq \text{máx}\left\{1,\ 2^{p-1}\right\},\ z \in \mathbb{C}.$$

Es claro que podemos suponer $p \neq 1$ y $z \neq 0$. Usando coordenadas polares, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\frac{\left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right)^{p/2}}{1 + r^p} \leq \text{máx}\left\{1,\ 2^{p-1}\right\},\ r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Fijado $r > 0$ la función $g(\theta) = 1 + 2r\cos\theta + r^2,\ 0 \leq \theta < 2\pi$, alcanza un valor máximo para $\theta = 0$, de manera que

$$\frac{\left(1 + 2r\cos\theta + r^2\right)^{p/2}}{1 + r^p} \leq \frac{(1+r)^p}{1+r^p},\ r > 0.$$

Consideremos la función $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ h(r) = (1+r)^p / (1+r^p)$. Si $p > 1$ calculamos

$$h'(r) = \frac{p\,(1+r)^{p-1}\left(1 - r^{p-1}\right)}{(1+r^p)^2}.$$

Observando los signos de la derivada anterior deducimos que h alcanza un máximo absoluto en $r = 1$ y $h(1) = 2^{p-1}$. Si $0 < p < 1$ tenemos

$$h'(r) = \frac{p\,(1+r)^p\left[(1+r)^{p-1} - r^{p-1}\right]}{(1+r^p)^2},$$

i.e. h tiene derivada negativa y, siendo decreciente, h alcanza su valor máximo en cero y $h(0) = 1$. Queda así probada la desigualdad (190).

De (189) y (191) resulta

$$\gamma_p \int_A |f|^p \, d\mu \leq \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A (\gamma_p |f_n|^p - |f - f_n|^p) \, d\mu \tag{192}$$

$$\leq \overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A \gamma_p |f_n|^p \, d\mu + \underline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A (-|f - f_n|^p) d\mu$$

$$< \varepsilon \, \gamma_p - \overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n|^p \, d\mu.$$

Como $\int_{X-A} |f - f_n|^p \;\; d\mu \to 0$ podemos escribir

$$\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_X |f - f_n|^p \;\; d\mu \leq \overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} \int_A |f - f_n|^p \;\; d\mu$$

$$\leq \left(\varepsilon - \int_A |f|^p \, d\mu \right) \; \gamma_p \leq \varepsilon \; \gamma_p$$

y, como ε es arbitrario, sigue la tesis. □

6.14. Caracterización de funciones acotadas Riemann integrables. Funciones reales semicontinuas.

(i) Toda función real acotada semicontinua inferiormente (resp. semicontinua superiormente) sobre un intervalo $[a, b]$ es límite de una sucesión creciente de funciones escalera semicontinuas inferiormente (resp. es límite de una sucesión decreciente de funciones escalera semicontinuas superiormente).

(ii) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada resulta

$$\underline{R} \int_a^b f = \int_a^b \underline{\text{lím}} \; f, \quad \overline{R} \int_a^b f = \int_a^b \overline{\text{lím}} \; f, \tag{193}$$

donde

$$\underline{R}\int_a^b f = \sup\left\{\int_a^b \varphi : \ \varphi \le f, \ \varphi - \ \mathit{escalera}\right\},$$

$$\overline{R}\int_a^b f = \inf\left\{\int_a^b \psi : \psi \ge f, \ \psi - \ \mathit{escalera}\right\}.$$

(iii) Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre $[a, b]$ sii es continua a.e..

Solución

(i) Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada semicontinua inferiormente. Dado un entero positivo n indicaremos

$$x_{n,j} = a + (j/2^n)(b - a), \ 0 \le j \le 2^n,$$

y definimos $F_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$F_n(x) = \begin{cases} \inf_{x_{n,0} \le y < x_{n,1}} F(y) & si \quad x_{n,0} \le x < x_{n,1} \\ \inf_{x_{n,j-1} < y < x_{n,j}} F(y) & si \quad x_{n,j-1} < x < x_{n,j}, \ 1 < j < 2^n, \\ \inf_{x_{n,2^n-1} < y \le x_{n,2^n}} F(y) & si \quad x_{n,2^n-1} < x \le x_{n,2^n}, \end{cases}$$

$$F_n(x_{n,j}) = \text{mín}\left\{\inf_{x_{n,j-1} < y < x_{n,j}} F(y), \ \inf_{x_{n,j} < y < x_{n,j+1}} F(y)\right\}, \ 1 \le j < 2^n - 1. \tag{194}$$

Por (194), cada F_n es función escalera semicontinua inferiormente.

$$x_{n,j-1} = x_{n+1,2j-2} < x < x_{n+1,2j-1} \quad o \quad x_{n+1,2j-1} < x < x_{n+1,2j} = x_{n,j},$$

obteniendo en ambos casos que $F_n(x) \le F_{n+1}(x)$. Si $x = x_{n,j}$ para ciertos $n, \ j$, supondremos que n es mínimo con dicha propiedad. Dado $k \in \mathbb{N}$ veremos que

$$F_k(x) \le F_{k+1}(x). \tag{195}$$

Si $n=1$ y $j=0$ o $j=2$ tal desigualdad es inmediata. Además

$$x_{1,1}=x_{k,2^{k-1}}=x_{k+1,2^k},$$

$$F_k\left(x_{1,1}\right)=\text{mín}\left\{\inf_{x_{k,2^{k-1}-1}<y<x_{k,2^{k-1}}}F\left(y\right),\ \inf_{x_{k,2^{k-1}}<y<x_{k,2^{k-1}+1}}F(y)\right\},$$

$$F_{k+1}\left(x_{1,1}\right)=\text{mín}\left\{\inf_{x_{k+1,2^k-1}<y<x_{k+1,2^k}}F\left(y\right),\ \inf_{x_{k+1,2^k}<y<x_{k+1,2^k+1}}F(y)\right\},$$

$$x_{k,2^{k-1}-1}<x_{k+1,2^k-1}<x_{1,1}<x_{k+1,2^k+1}<x_{k,2^{k-1}+1},$$

de modo que $F_k\left(x_{1,1}\right)\leq F_{k+1}\left(x_{1,1}\right)$. Suponiendo $1\leq k<n$, por el carácter mínimo de n existe un único $h,\ 1\leq h\leq 2^k$, tal que

$$x_{k,h-1}=x_{k+1,2h-2}<x_{n,j}<x_{k,h}=x_{k+1,2h}. \tag{196}$$

Si $k=n-1$ entonces $j=2h-1$,

$$F_k\left(x_{n,j}\right)=\text{mín}_{x_{k,h-1}<y<x_{k,h}}F\left(y\right), \tag{197}$$

$$F_{k+1}\left(x_{n,j}\right)=F_{k+1}\left(x_{k+1,2h-1}\right),$$

$$=\text{mín}\left\{\inf_{x_{k,h-1}<y<x_{k+1,2h-1}}F(y),\ \inf_{x_{k+1,2h-1}<y<x_{k,h}}F(y)\right\}$$

y, por (196) y (197), sigue (195). Si $k<n-1$ ha de ser

$$x_{k+1,2h-2}<x_{n,j}<x_{k+1,2h-1}\quad o\quad x_{k+1,2h-1}<x_{n,j}<x_{k+1,2h} \tag{198}$$

y (195) sigue ahora de (196), (198) y las definiciones de F_k y F_{k+1}. Finalmente, si $k\geq n$ resulta $x_{n,j}=x_{k,2^{k-n}j}=x_{k+1,2^{k-n+1}j}$ y basta razonar como en los casos anteriores. Probado que $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones escalera semicontinuas inferiormente probamos que $F=\text{lím}_{n\to+\infty}F_n$ puntualmente. Si $x_0\in[a,b]$ y $\varepsilon>0$ es $F(x_0)-\varepsilon<\underline{\text{lím}}_{z\to x_0}F(z)$. Existe $\delta>0$ tal que

$$F(x_0)-\varepsilon<F(z)\quad si\quad z\in[a,b]\cap\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right). \tag{199}$$

Sea $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)/2^{r_0} < \delta$, $r \geq r_0$ en $\mathbb{N}$, $1 \leq s \leq 2^r$ el único entero tal que $x_{r,s-1} \leq x_0 \leq x_{r,s}$. Por (199), las presentes condiciones y la definición de F_r podemos concluir que $F_r(x_0) \geq F(x_0) - \varepsilon$ y queda probada nuestra afirmación. La demostración para funciones acotadas semicontinuas superiormente sigue análogamente.

(ii) Probaremos la primer identidad pues la segunda sigue análogamente. Como f es acotada su límite inferior es semicontinuo inferiormente o, equivalentemente, para todo $r \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\underline{\text{lím}}\, f > r\}$ es abierto. Luego $\underline{\text{lím}}\, f$ es medible, pues se realiza como límite de una sucesión creciente de funciones escalera semicontinuas inferiormente. En consecuencia, está definida la integral de Lebesgue en (193). Fijada una función escalera φ sobre $[a,b]$ tal que $\varphi \leq f$ resulta $\varphi \leq \underline{\text{lím}}\, f$ salvo un número finito de puntos, de modo que $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \underline{\text{lím}}\, f$. Como φ es arbitraria $\underline{R}\int_a^b f \leq \int_a^b \underline{\text{lím}}\, f$. Por otra parte, si $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones escalera sci que converge a $\underline{\text{lím}}\, f$ en todo punto, por el teorema de convergencia monótona tenemos

$$\int_a^b \underline{\text{lím}}\, f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n \leq \underline{R}\int_a^b f$$

y tenemos (i).

(ii) f es continua a.e. sii $\overline{\text{lím}}\, f = \underline{\text{lím}}\, f$ a.e., y basta considerar (ii). □

6.15. Sobre el gráfico de funciones medibles (Lebesgue) no negativas. Teorema de Tonelli y subconjuntos no medibles en espacios producto. El álgebra de Banach de medidas complejas Borel - regulares sobre $\mathbb{R}$ y subconjuntos de medidas discretas, continuas y absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue.

(i) Sea $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ medible Lebesgue,

$$A(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < f(x)\right\},$$

$A(f)$ es medible, $\int_{\mathbb{R}} f = |A(f)|$ es la medida bidimesional de $A(f)$, graf (f) es medible y tiene medida nula.

(ii) Sea χ_1 el primer ordinal no numerable, X un conjunto de cardinal χ_1, Ξ la $\sigma-$ álgebra de partes numerables o de complemento numerable de X. Sea $\mu : \Xi \to \{0,1\}$, $\mu(A) = 0$ o 1 según $A \in \Xi$ sea numerable o no numerable respectivamente. Si $A = \{(\alpha,\beta) \in X \times X : \ \alpha < \beta\}$ entonces

$$\int_X \varkappa_A(\alpha,\beta) \ d\mu(\alpha) \neq \int_X \varkappa_A(\alpha,\beta) \ d\mu(\beta),$$

pero no es aplicable el teorema de Tonelli.

(iii) Sea E subconjunto de $[0,1]\times[0,1]$ tal que E_x y $[0,1]-E^y$ son numerables para todo $x,\ y \in [0,1]$. Entonces E es no medible en el espacio producto. [95]

(iv) Sea $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de medidas complejas de Borel regulares sobre $\mathbb{R}$, con la norma $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$ para cada $\mu \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Para $\mu,\ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ y $E \subseteq \mathbb{R}$ boreliano definimos

$$(\mu * \lambda)(E) = (\mu \times \lambda)\left(\Phi^{-1}(E)\right),$$

donde $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = x+y$. Si $\mu,\ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ entonces $\mu \times \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$, $\|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\|\,\|\lambda\|$ y $\mu * \lambda$ es la única medida de Borel ν sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$(\forall f),\ f \in C_0(\mathbb{R}) : \ \int_{\mathbb{R}} f \ d\nu = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) \ d(\mu \times \lambda).$$

Entonces que $(\mathrm{MB}(\mathbb{R}), \|\circ\|, *)$ deviene en álgebra de Banach abeliana unitaria.

(v) El subconjunto de medidas discretas es una subálgebra de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$.

(vi) El subconjunto de medidas continuas es un ideal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$.

(vii) El subconjunto $\mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$ de medidas absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue es un ideal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$ que es algebraicamente isométricamente isomorfo a $L^1_{dx}(\mathbb{R})$, donde dx es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

[95] En general, si $X,\ Y$ son conjuntos no vacíos, $S \subseteq X \times Y$, $x \in X,\ y \in Y$, escribimos

$$S_x = \{y \in Y : \ (x,y) \in S\},\ S^y = \{x \in X : \ (x,y) \in S\}.$$

Solución

(i) La función $F : \mathbb{R}\times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y - f(x)$, es medible. En efecto, $F = p_2 - f\circ p_1$, donde $p_1,\ p_2$ son las proyecciones de $\mathbb{R}\times (0,\infty)$ sobre $\mathbb{R}$ y $(0,\infty)$ respectivamente. Estas proyecciones son medibles pues son continuas. Basta observar que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ entonces $p_1^{-1}(E)$ también lo es, ya que $p_1^{-1}(E) = E\times(0,\infty)$ es producto de conjuntos medibles. Como

$$A(f) = \{(x,y)\in \mathbb{R}\times (0,\infty) :\ F(x,y) < 0\}$$

entonces $A(f)$ resulta medible. Por el teorema de Tonelli escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}}\int_0^{f(x)} dy\ dx = \int\int_{\mathbb{R}\times(0,\infty)} \varkappa_{A(f)}(x,y)\, d(x\times y) = |A(f)|\,.$$

$\operatorname{graf}(f)$ es medible porque $\operatorname{graf}(f) = F^{-1}\{0\}$. Si $n\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ los conjuntos $U_{n,\varepsilon} = \{(x,y) :\ |x| < n/2,\ |F(x,y)| < \varepsilon/(n2^{n+1})\}$ son abiertos en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ y cubren a $\operatorname{graf}(f)$. Además, por el teorema de Tonelli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_{n,\varepsilon}| = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-n/2}^{n/2}\int_{f(x)-\varepsilon/(n2^{n+1})}^{f(x)+\varepsilon/\left(n2^{n+1}\right)} 1\ dy\ dx = \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario $|\operatorname{graf}(f)| = 0$.

(ii) Si $\alpha\in X$ el conjunto $A_\alpha = \{\beta\in X :\ \alpha < \beta\}$ es no numerable de complemento numerable, i.e. $A_\alpha\in\Xi$. Asimismo, si $\beta\in X$ el conjunto $A^\beta = \{\alpha\in X :\ \alpha<\beta\}$ es numerable, de modo que pertenece a Ξ.

$$\int_X \varkappa_A(\alpha,\beta)\ d\mu(\beta) = \mu(A_\alpha) = 1,\ \int_X \varkappa_A(\alpha,\beta)\ d\mu(\alpha) = \mu\left(A^\beta\right) = 0.$$

El teorema de Tonelli no es aplicable pues (X,Ξ,μ) no es espacio de medida finita.

(iii) Si $x,\ y\in[0,1]$ obtenemos

$$\int_0^1 \varkappa_E(x,y)\ dx = \int_0^1 \varkappa_{E^y}(x)\ dx = 1,$$

$$\int_0^1 \varkappa_E(x,y)\ dy = \int_0^1 \varkappa_{E_x}\ (x,y)\ dy = 0.$$

Como el espacio producto con la medida de Lebesgue es espacio de medida finita, del teorema de Tonelli concluímos que E es necesariamente no medible.

(iv) $(\mathrm{MB}(\mathbb{R}), \|\circ\|, *)$ es espacio de Banach, en cuanto se realiza, por el teorema de representación de funcionales lineales continuas sobre $C_0(\mathbb{R})$, como dual sobre $\mathbb{C}$ de un espacio normado. Si $\mu,\ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ entonces $\mu * \lambda$ está bien definida porque Φ es función continua y, por ello, boreliana. Evidentemente $\mu * \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ y, si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una partición disjunta de subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$ tenemos (cf. [43], Ch. 7, Th. 7.6 - Def. 7.7, page 148)

$$\sum_{n=1}^{m} |(\mu * \lambda)(E_n)| = \sum_{n=1}^{m} \left|(\mu \times \lambda)\left(\Phi^{-1}(E_n)\right)\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left| \int_{\mathbb{R}} \lambda\left(\Phi^{-1}(E_n)_x\right)\ d\mu(x) \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left| \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_n - x)\ d\mu(x) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{m} |\lambda(E_n - x)|\ d|\mu|(x) \leq \|\lambda\| \|\mu\|.$$

Siendo $\{E_n\}_{n\geq 1}$ arbitraria, $\|\mu * \lambda\| \leq \|\lambda\| \|\mu\|$. Si $g \in C_c(\mathbb{R})$ escribimos

$$\langle g, \Lambda \rangle = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)\ d(\mu \times \lambda).$$

Λ está bien definida, es lineal y $|\langle g, \Lambda\rangle| \leq \|g\|_\infty \|\mu * \lambda\|$ para cada $g \in C_c(\mathbb{R})$. Por ser $C_c(\mathbb{R})$ denso en $C_0(\mathbb{R})$ el operador Λ se extiende naturalmente a $C_0(\mathbb{R})$ y, con abuso de notación,

$$\Lambda \in C_0(\mathbb{R})^* \quad y \quad \|\Lambda\| \leq \|\mu * \lambda\|.$$

Más aún, si $g \in C_0(\mathbb{R})$ existe $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ (v. Problema 5.6(ii)). Como la convergencia es uniforme y $\mu * \lambda$ es medida finita, por el teorema de Lebesgue obtenemos

$$\langle g, \Lambda \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle g_n, \Lambda \rangle = \int \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) \ d(\mu \times \lambda) \, .$$

Basta finalmente invocar el teorema de representación de Riesz de funcionales sobre $C_0(\mathbb{R})$ (cf. [43], Ch. 6, Th. 6.19, page 139). La conmutatividad de $*$ sigue aplicando el teorema de Fubini. Finalmente, si $\mu \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$. $f \in C_0(\mathbb{R})$ y δ es la medida de Borel concentrada en $\{0\}$ por el teorema de Fubini

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) \ d(\mu * \delta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \ d\mu(x) \ d\delta(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \ d\mu(x) \, .$$

Por lo anterior deducimos que $\mu * \delta = \mu$ y sigue (iii).

(v) El subconjunto de medidas discretas de Borel es un subespacio lineal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Dadas $\mu, \ \lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$, $\mu * \lambda$ es discreta si μ y λ lo son. En efecto, sean A y B subconjuntos borelianos numerables de $\mathbb{R}$ en los que se concentran μ y λ respectivamente. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es boreliano, por el teorema de Fubini escribimos

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu\left(\Phi^{-1}(E)^t\right) \ d\lambda(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu(E-t) \ d\lambda(t) = \int_B \int_{(E-t)\cap A} 1 \, d\mu(s) \ d\lambda(t)$$

$$= \int \int_{(E \cap (A+B)) \times B} 1 \ d(\mu \times \lambda) \, .$$

En consecuencia $\mu * \lambda$ está concentrada en el conjunto numerable $A+B$.

(vi) El subconjunto de medidas continuas de Borel es un subespacio lineal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Si μ es una medida continua de Borel, $\lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$ es

$$(\mu * \lambda)(\{x\}) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x-t\}) \ d\lambda(t) = 0$$

y siendo x arbitrario $\mu * \lambda$ resulta continua.

(vii) Es claro que $\mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$ es subespacio lineal de $\mathrm{MB}(\mathbb{R})$. Sean

$$\lambda \in \mathrm{MB}(\mathbb{R}), \mu \in \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R}),$$

$E \subseteq \mathbb{R}$ boreliano de medida de Lebesgue nula. Entonces

$$(\mu * \lambda)(E) = \int_{\mathbb{R}} \mu(E-t) \; d\lambda(t) = 0$$

pues la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones y $\mu \ll dx$. Como E es arbitrario $\mu * \lambda \ll dx$. Sea

$$\Pi : \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R}) \to L^1_{dx}(\mathbb{R}), \; \Pi(\mu) = d\mu/dx,$$

esto es, la derivada de Radon - Nikodym de μ respecto a la medida de Lebesgue. Si $\mu_1, \; \mu_2 \in \mathcal{B}_{ac,dx}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ y $F \subseteq \mathbb{R}$ es boreliano tenemos

$$\left(\int_F a \frac{d\mu_1}{dx} + \frac{d\mu_2}{dx}\right) \; dx = a \int_F \frac{d\mu_1}{dx} \; dx + \int_F \frac{d\mu_2}{dx} \; dx$$

$$= (a\mu_1 + \mu_2)(F) = \int_F \frac{d(a\mu_1 + \mu_2)}{dx} \; dx.$$

Como F es arbitrario $\Pi(a\mu_1 + \mu_2) = a\Pi(\mu_1) + \Pi(\mu_2)$ y Π resulta lineal. Además

$$\int_F d(\mu_1 * \mu_2)/dx \; dx = (\mu_1 * \mu_2)(F) \tag{200}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mu_1(F-t) \; d\mu_2(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_F \frac{d\mu_1}{dx}(x-t) \; dx \; \frac{d\mu_2}{dt}(t) \; dt.$$

Por el teorema de Tonelli

$$\int \int_{\mathbb{R} \times F} \left| \frac{d\mu_1}{dx}(x-t) \frac{d\mu_2}{dt}(t) \right| d(t \times x) \leq \|\mu_1\| \, \|\mu_2\| < \infty$$

y, por el teorema de Fubini aplicado en (200) obtenemos

$$\int_F d\left(\mu_1 * \mu_2\right)/dx \ dx = \int_F \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_1}{dx}\left(x-t\right) \ \frac{d\mu_2}{dt}\left(t\right) dt \ dx$$

$$= \int_F \frac{d\mu_1}{dx} * \frac{d\mu_2}{dt} \ dx.$$

Por lo tanto $\Pi\left(\mu_1 * \mu_2\right) = \Pi\left(\mu_1\right) * \Pi\left(\mu_2\right)$. Si $\mu \in \mathcal{B}_{ac,dx}\left(\mathbb{R}\right)$ es

$$\left\|\Pi\left(\mu\right)\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left|d\mu/dx\right| \ dx = \left\|\mu\right\|$$

(cf. [43], Ch. 6, Th. 6.13, page 134). Por otra parte si $f \in L^1_{dx}\left(\mathbb{R}\right)$ entonces $f \ dx \in \mathcal{B}_{ac,dx}\left(\mathbb{R}\right)$ y $\Pi(f \ dx) = f$. Por el teorema de la función abierta Π deviene isomorfismo isométrico. $\square$

6.16. Medidas sobre $(0,+\infty)$ no extendibles a una medida sobre $\mathbb{R}$. Convergencias débil y en norma de medidas reales sobre $[0,1]$. Sucesiones equirepartidas respecto a una medida definida sobre un espacio compacto. Sobre la no continuidad de la aplicación natural $C_{\mathbb{C}}\left(X\right) \times \mathrm{M}_{\mathbb{C}}\left(X\right) \to \mathbb{C}$ siendo X espacio compacto separado infinito. Local debil compacidad del cono de medidas positivas sobre un espacio compacto.

(i) La medida dx/x sobre $(0,+\infty)$ no es extendible a una medida sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Si $t \in [0,1]$ indicamos δ_t a la medida (de Dirac) concentrada en $\{t\}$. Entonces $\delta_0 - \delta_{1/n} \ \underset{\rightarrow}{w} \ 0$ y $\left|\delta_0 - \delta_{1/n}\right| \ \underset{\rightarrow}{w} \ 2\delta_0$.

(iii) $\left(1-\sin\left(nx\right)\right)dx \ \underset{\rightarrow}{w} \ dx$ pero $\left(1-\sin\left(nx\right)\right)dx \nrightarrow dx$ en norma en $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}\left([0,1]\right)$. [96]

[96] En general, si X es un espacio localmente compacto indicamos $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}\left(X\right)$, $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}\left(X\right)$ a los espacios de funcionales lineales acotadas sobre $C_0\left(X\right)$, reales y complejas, respectivamente.

(iv) Sea X espacio compacto, μ medida positiva sobre X de norma uno, $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sucesión en X. Para que $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ esté *equirepartida respecto a* μ, i.e. $(\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n})/n \underset{\rightarrow}{w} \mu$, es necesario y suficiente que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_k(x_j) \to \int_X f_k \; d\mu \tag{201}$$

para cada k, donde $(f_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión total en $C_{\mathbb{C}}(X)$.

(v) Sea X espacio compacto Hausdorff infinito. Considerando $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$ munido de la topología débil, la aplicación

$$\Xi : C_{\mathbb{C}}(X) \times \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathbb{C}, \quad \Xi(f,\mu) = \int_X f \; d\mu$$

no es continua. [97]

(vi) Si X es compacto, el espacio de medidas positivas $\mathrm{M}_{+}(X)$, con la topología débil, es localmente compacto.

Solución

(i) Si n es entero no menor que 2 definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx) & si \quad |x| \leq \pi/(2n) \\ 1 & si \quad \pi/(2n) \leq |x| \leq 1 \\ 2-x^2 & si \quad 1 \leq |x| \leq \sqrt{2} \\ 0 & si \quad \sqrt{2} \leq |x|. \end{cases}$$

[97] Aplicando el principio de acotación uniforme, si

$$\{f\}\cup\{f_a\}_{a\in A} \subseteq C_{\mathbb{C}}(X), \; \{\mu\}\cup\{\mu_a\}_{a\in A} \subseteq \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X),$$

$$\lim_{a\in A} \|f_a - f\| = 0, \quad \mu_a \underset{\rightarrow}{w} \mu$$

entonces $\langle f_a, \mu_a\rangle \to \langle f,\mu\rangle$. Este hecho, junto a (v), determinan la no metrizabilidad de la topología débil de $\mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$. Precisamente, la propiedad anterior establece la continuidad puntual de Ξ. Dicha continuidad, junto a la separabilidad que induciría la metrizabilidad, implicarían la continuidad de Ξ contrariamente a (v).

Entonces $\{f_n\}_{n\geq 2} \subseteq C_c(\mathbb{R})$ y $\|f_n\|_\infty \leq 1$ para todo n. Si μ fuere una medida sobre $\mathbb{R}$ que extiende a dx/x, para todo n tendríamos

$$\|\mu\| \geq \left| \int_{\mathbb{R}} f_n \; d\mu \right| > 2 \int_{\pi/(2n)}^{1} \frac{dx}{x} = 2 \; \ln(2n/\pi),$$

lo cual es imposible.

(ii) La primer afirmación es evidente. Por otra parte, $\delta_0 - \delta_{1/n}$ es una medida real y, evidentemente,

$$\left(\delta_0 - \delta_{1/n}\right)^+ = \delta_0, \; \left(\delta_0 - \delta_{1/n}\right)^- = \delta_{1/n},$$

de manera que $\left|\delta_0 - \delta_{1/n}\right| = \delta_0 + \delta_{1/n}$ y $\left|\delta_0 - \delta_{1/n}\right| \; \underset{\to}{w} \; 2\delta_0$.

(iii) Si $p \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ es una función polinómica sigue fácilmente que

$$\langle p, (1 - \sin(nx))\, dx \rangle \to \langle p, dx \rangle.$$

En general, basta considerar la densidad de las funciones polinómicas en $C_{\mathbb{R}}[0,1]$. Por otra parte, si $n \geq 4$ tenemos

$$\|\sin(nx) \; dx\| = \int_0^1 |\sin(nx)| \; dx = \frac{1}{n} \int_0^n |\sin(nx)| \; dx$$

$$= (2/n) \; [n/\pi] + \frac{(-1)^{[n/\pi]}}{n} \int_{[n/\pi]\pi}^{n} \sin(nx) \; dx$$

$$= (2/n) \; [n/\pi] + \left(1 + (-1)^{[n/\pi]+1} \cos n\right) /n$$

$$> 2/\pi + \left((-1)^{[n/\pi]+1} \cos n\right) /n.$$

Luego $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \|\sin(nx) \; dx\| \geq 2/\pi$ y sigue (iii).

(iv) La necesidad es inmediata. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión total en $C_{\mathbb{C}}(X)$ y asumamos válida (201) para cada k. Sean $f \in C_{\mathbb{C}}(X)$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$

tal que $\|f-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\|_\infty \leq \varepsilon/3$ para ciertas constantes $\{a_k\}_{1\leq k\leq m}$ en $\mathbb{C}$. Existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_0$ en $\mathbb{N}$ es

$$\left|\left\langle \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k,\ \frac{\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n}}{n}\right\rangle - \int_X \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\ d\mu\right| \leq \varepsilon/3.$$

Entonces

$$\varepsilon \geq 2\left\|f-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\right\|_\infty + \varepsilon/3$$

$$\geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f(x_j)-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k(x_j)\right| + \left|\int_X\left(f-\sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\right)\ d\mu\right| +$$

$$+\left|\left\langle \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k,\ \frac{\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n}}{n}\right\rangle - \int_X \sum_{k=1}^{m} a_k\ f_k\ d\mu\right|$$

$$\geq \left|\left\langle f,\ \frac{\delta_{x_1}+...+\delta_{x_n}}{n}\right\rangle - \int_X f\ d\mu\right|.$$

Como ε y f son arbitrarios sigue la afirmación.

(v) Si Ξ es continua, como $\Xi(0,0)=0$ existen $\zeta>0$, $\mathcal{F}\in\mathcal{P}_f(C_{\mathbb{C}}(X))$ tales que $B(0,\zeta)\times\mathfrak{Q}\subseteq \div^{-1}[D(0,1)]$, donde

$$\mathfrak{Q}=\cap_{g\in\mathcal{F}}\{\eta\in \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X):\ \ |\langle g,\eta\rangle|<1\}.$$

Como X es compacto Hausdorff infinito $C_{\mathbb{C}}(X)$ tiene dimensión infinita.[98] Sea $S=\mathrm{cl}\,(\mathrm{gen}_{\mathbb{C}}\mathcal{F})$, $f\notin S$, $f_0=\zeta f/(2\|f\|_\infty)$,

$$s: S\bigoplus\mathbb{C}\cdot f_0\to\mathbb{C},\quad s(h+a\cdot f_0)=2a,\ h\in S,\ a\in\mathbb{C}.$$

Claramente s está bien definida, es lineal y si $a\neq 0$ tenemos

$$\|h+a\cdot f_0\|=|a|\,\|h/a+f_0\|\geq|a|\ \mathrm{dist}\,(f_0,S),$$

[98]Si $\{x_n\}_{n\geq1}$ es una sucesión inyectiva de puntos de X sea $f_j: X\to[0,1]$ continua tal que $f_j(x_{2j-1})=0,\ f_j(x_{2j})=1,\ j\in\mathbb{N}$. Entonces $\{f_j\}_{j\geq1}$ es linealmente independiente.

i.e. $|s(h+a\cdot f_0)| \leq [2/\operatorname{dist}(f_0,S)]\,\|h+a\cdot f_0\|$, desigualdad válida también para $a=0$. Por el teorema de Hahn - Banach existe una extensión $\mu\in \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X)$ de s. En particular, $\mu\in\mathfrak{Q}$ pues $\langle g,\mu\rangle = 0$ si $g\in F$. Pero $\|f_0\| = \zeta/2$ y $\Xi(f_0,\mu) = 2$, una contradicción por la cual deducimos (v).

(vi) La aplicación $\Psi : \mathrm{M}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathbb{C}$, $\langle \mu,\Psi\rangle = \langle 1,\mu\rangle$ es lineal y $w-$ continua. Luego $\Psi\mid_{\mathrm{M}_+(X)}: \mathrm{M}_+(X) \to [0,+\infty)$ es $w-$ continua. Si $\mu_0\in \mathrm{M}_+(X)$ hay un entorno débil V de μ_0 tal que $V\cap \mathrm{M}_+(X)\subseteq \Psi^{-1}[0,2\|\mu_0\|)$. En consecuencia, si $f\in C_{\mathbb{C}}(X)$ y $\mu\in V\cap \mathrm{M}_+(X)$ escribimos

$$|\langle f,\mu\rangle| \leq \|\mu\|\,\|f\| = \langle \mu,\Psi\rangle\,\|f\| \leq 2\,\|\mu_0\|\,\|f\|,$$

i.e. $\sup_{\mu\in V\cap \mathrm{M}_+(X)} |\langle f,\mu\rangle| < +\infty$. Por el teorema de acotación uniforme $V\cap \mathrm{M}_+(X)$ deviene acotado en norma y, por lo tanto, es débilmente acotado en $\mathrm{M}_+(X)$. Por el teorema de Banach - Alaoglu, como $\mathrm{M}_+(X)$ es débilmente separado y la clausura de conjuntos acotados es acotada, deducimos que $\mathrm{M}_+(X)$ es localmente compacto. $\square$

6.17. Funciones de Rademacher e independencia estocástica. Caracterización de la convergencia de series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, f_n(x)$, en las que $\{c_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales y $\{f_n\}_{n\geq 0}$ son las funciones de Rademacher. Sobre integración del producto de funciones estocásticamente independientes en espacios de probabilidad. Lema de Borel - Catelli. Sobre una medida en el espacio producto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. El espacio $L^p_{\mathbb{C}}([0,1],dx)$, $1\leq p\leq\infty$, y espacios de Lebesgue asociados a cierta partición de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Un sistema ortonormal no total de $L^2_{\mathbb{C}}([0,1],dx)$.

(i)(1) Consideremos las funciones de Rademacher:

$$f_n : [0,1]\to\mathbb{R},\;\; f_n = \sum_{i=1}^{2^n} (-1)^i\;\varkappa_{[(i-1)/2^n,\, i/2^n)},\;\; n\in\mathbb{N}_0. \qquad (202)$$

En particular, dos cualesquiera de $f_1,\ f_2$ y $f_1 \cdot f_2$ son *estocásticamente independientes*[99], no siéndolo conjuntamente.

(i)(2) Si $\{c_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ f_n(x)$ converge o diverge a.e. si y solo si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ converge o diverge respectivamente.

(ii)(1) Sea (X, Σ, μ) un espacio de probabilidad, $f,\ g$ funciones integrables, no nulas, independientes, $B \subseteq \mathbb{R}$ boreliano. Entonces

$$\int_{f^{-1}(B)} fg\ d\mu = \int_{f^{-1}(B)} f\ d\mu \int_X g\ d\mu.$$

(ii)(2) (lema de Borel - Catelli) Si $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos independientes, $\mu(\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty} E_n) = 0$ sii $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty$.

(iii) Consideremos $\{0,1\}$ con la topología discreta. Sea μ medida sobre $\mathcal{P}(\{0,1\})$ tal que $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1/2$. En el espacio compacto $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sea μ_X la medida producto, definida sobre la $\sigma-$ álgebra generada por partes de X del tipo $A_1 \times A_2 \times ...$ en las que, salvo un número finito de $n\'{}s$, $A_n = \{0,1\}$ (cf. [19], Ch. VII, §38, Th. B, page 154).

(iii)(1) La aplicación $\pi : X \to [0,1],\ \pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n,\ x \in X$, es continua.

(iii)(2) Si $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es medible y tiene $\mu-$ medida nula.

(iii)(3) El conjunto Y de elementos x de X para los que $x_n = 1$ salvo finitos $n\'{}s$ es medible de medida nula.

[99]Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y Θ es un conjunto de funciones medibles, se dice que Θ es *estocásticamente independiente* (o simplemente *independiente*) si para todo $F \in \mathcal{P}_f(\Theta)$ y para conjuntos borelianos $\{B_f\}_{f\in F}$ en $\mathbb{C}$ es

$$\mu\left(\bigcap_{f\in F} \{x \in X : f(x) \in B_f\}\right) = \prod_{f\in F} \mu\{x \in X : f(x) \in B_f\}.$$

(iii)(4) [100]Si $x \in X - Y$ sea $\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$. Entonces π define una correspondencia biyectiva entre $X - Y$ y $[0,1)$. Si $0 \leq a < b \leq 1$ el conjunto $\pi^{-1}([a,b))$ es medible y $\mu(\pi^{-1}([a,b))) = b - a$.

(iv)(1) Identifiquemos los elementos $x, \acute{x} \in X$ tales que $\pi(x) = \pi(\acute{x})$. El espacio cociente, al que por abuso de notación indicaremos X, deviene compacto con la topología cociente y es homeomorfo a $[0,1]$ vía la aplicación π. Asimismo, podemos suponer que la medida producto es completa. Si $1 \leq p \leq \infty$ los espacios $L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ y $L^p_{\mathbb{C}}(X, d\mu)$ son isométricamente isomorfos.

(iv)(2) Para $n \in \mathbb{N}$ indicamos $\pi_n : X \to \{0,1\}$ a la proyección canónica a la $n-$ ésima coordenada. Con la notación (i)(1), $f_n(t) = 1 - 2\pi_n(\pi^{-1}(t))$ si t no es de la forma $k/2^m$, $k, m \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq k \leq 2^m$, $f_n(t) = 0$ en otro caso[101]. Las funciones $\{f_n\}_{n \geq 0}$ forman un sistema ortonormal no total de $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$.

Solución

(i)(1) Indicaremos $g_1 = f_1,\ g_2 = f_2,\ g_3 = f_1 \cdot f_2$. Entonces

$$g_1 = -\varkappa_{[0,1/2)} + \varkappa_{[1/2,1)}, \tag{203}$$

$$g_2 = -g_3 = -\varkappa_{[0,1/4)} + \varkappa_{[1/4,1/2)} - \varkappa_{[1/2,3/4)} + \varkappa_{[3/4,1)}.$$

Si $B \subseteq \mathbb{R}$ es boreliano e $i = 1,\ 2,\ 3$ resulta $g_i^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\{-1,0,1\})$ y

[100]En este punto consideramos $X - Y$ como subespacio de medida de X.
[101]Si $n \in \mathbb{N}$ es fácil ver que $f_n(t) = -\operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$, $t \in [0,1]$.

tenemos el siguiente arreglo:

$\boxed{\mathcal{P}(\{-1,0,1\})}$	$\boxed{g_1^{-1}(B)}$	$\boxed{g_2^{-1}(B)}$	$\boxed{g_3^{-1}(B)}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{-1\}$	$\left[0,\frac{1}{2}\right)$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$	$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\left[\frac{1}{2},1\right)$	$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right)$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right)$
$\{-1,0\}$	$\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\{1\}$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\cup\{1\}$	$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\cup\{1\}$
$\{-1,1\}$	$[0,1)$	$[0,1)$	$[0,1)$
$\{0,1\}$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$	$\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{3}{4},1\right]$
$\{-1,0,1\}$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$

Si m es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, del arreglo anterior sigue que las medidas de las preimágenes de cualquier boreliano de $\mathbb{R}$ por $g_1,\ g_2$ o g_3 son $0,\ 1/2, 1$. Observamos que en cada columna hay básicamente dos subconjuntos de medida $1/2$ iguales, salvo conjuntos de medida nula. Si $B_1,\ B_2,\ B_3$ son borelianos en $\mathbb{C}$ y

$$m(\{g_i\in B_i\})=m(\{g_j\in B_j\})=1/2,\ 1\leq i<\ j\leq 3,$$

la condición de independencia sigue del análisis de tres casos (salvo conjuntos de medida nula). Si $m\left(g_i^{-1}(B_j)\right)=0$ para algún par de índices se verifica claramente, en todo caso, la condición de independencia. Si $m(\{g_i\in B_i\})=1$, como $m(\{g_i\notin B_i\})=0$ tenemos

$$\begin{aligned} m(\{g_j\in B_j\}) &= m(\{g_i\in B_i\}\cap\{g_j\in B_j\}) \\ &= m(\{g_i\in B_i\})\cdot m(\{g_j\in B_j\}) \end{aligned}$$

y sigue así la primera parte. Finalmente, como

$$0 = m\left(x \in [0,1] : \{g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)\} \subseteq [0,1]\right),$$

$$1/8 = m\left(\{g_1 \in [0,1]\}\right) \cdot m\left(\{g_2 \in [0,1]\}\right) \cdot m\left(\{g_3 \in [0,1]\}\right),$$

$\{g_1,\ g_2,\ g_3\}$ no es estocásticamente independiente.

(i)(2) La sucesión $\{f_n\}_{n\geq 0}$ de funciones de Rademacher es estocásticamente independiente. En efecto, sean $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}_0)$, $\{B_n\}_{n\in F}$ subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ y veamos que

$$m\left(\bigcap_{n\in F} f_n^{-1}(B_n)\right) = \prod_{n\in F} m\left(f_n^{-1}(B_n)\right). \tag{204}$$

Si para algún $n \in F$ el conjunto $\{-1,0,1\} \cap B_n$ es vacío o $\{0\}$ ambos miembros en (204) son nulos. Si $\{-1,1\} \subseteq B_n$ o $\{-1,0,1\} \subseteq B_n$ entonces $m\left(f_n^{-1}(B_n)\right) = 1$. Podemos suponer $\sharp\left(\{-1,1\} \cap B_n\right) = 1$ para cada $n \in F$. Si $k \in \mathbb{N}$ es inmediato que

$$m\left(\{f_k = 1\}\right) = m\left(\{f_k = -1\}\right) = 2^{-1}.$$

Entonces, si $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_k \in \{-1,1\}$ y $n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N}$ es

$$2^{-2} = m\left(\{f_{n_1} = \varepsilon_1,\ f_{n_2} = \varepsilon_2\}\right),$$

$$2^{-3} = m\left(\{f_{n_1} = \varepsilon_1,\ f_{n_2} = \varepsilon_2,\ f_{n_3} = \varepsilon_3\}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2^{-k} = m\left(\{f_{n_1} = \varepsilon_1,\ \ldots,\ f_{n_k} = \varepsilon_k\}\right).$$

Entonces

$$m\left(\bigcap_{n\in F} f_n^{-1}(B_n)\right) = 2^{-\sharp F} = \prod_{n\in F} 2^{-1} = m\left(\bigcap_{n\in F} f_n^{-1}(B_n)\right).$$

Tenemos $\int_0^1 f_n\ dm = 0$ y $\sigma^2(f_n) = 1$ para cada n (i.e. cada f_n tiene *varianza* uno[102]). En general, si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones independientes sobre un espacio de probabilidad (X, Σ, μ) y existe $c > 0$ tal que $|g_n| \leq c$ a.e. $[\mu]$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge a.e. $[\mu]$ sii las series $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X g_n\ d\mu$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma^2(f_n)$ son convergentes (cf. [19], Ch. IX, Sec. 46, Th. D, page 199), de donde sigue (i)(2).

(ii)(1) fg es integrable porque f y g son independientes e integrables.[103] Además $\varkappa_{f^{-1}(B)} = \varkappa_B \circ f$ es medible, $f \cdot \varkappa_{f^{-1}(B)}$ es evidentemente integrable. Como $\varkappa_B \circ f$ y g son independientes [104] obtenemos

$$\int_{f^{-1}(B)} fg\ d\mu = \int_X \left(f \cdot \varkappa_{f^{-1}(B)}\right) \cdot g\ d\mu$$

$$= \int_X f \cdot \varkappa_{f^{-1}(B)}\ d\mu \int_X g\ d\mu = \int_{f^{-1}(B)} f\ d\mu \int_X g\ d\mu.$$

(ii)(2) $\{\varkappa_{E_n}\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones independientes, para lo cual basta ver que para cualquier par de subconjuntos disjuntos finitos F y G de $\mathbb{N}$ es

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F,\ j\in G} E_i - E_j\right) = \prod_{i\in F,\ j\in G} \mu(E_i)\left(1 - \mu(E_j)\right).$$

Fijados F y G, en un primer caso, como $\{E_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos independientes podemos suponer $G \neq \emptyset$. Si $G = \{j_1\}$ te-

[102] Si (X, Σ, μ) es un espacio de probabilidad y $f : X \to \mathbb{R}$ es integrable, se define la *varianza* de f como $\sigma^2(f) = \int_X \left(f - \int_X f\ d\mu\right)^2 d\mu$.

[103] Si $f_1,\ f_2$ son funciones independientes, su producto es integrable sii ambas lo son, en cuyo caso $\int_X f_1 \cdot f_2\ d\mu = \int_X f_1\ d\mu = \int_X f_2\ d\mu$ (cf. [19], Ch. IX, Sec. 45, Th. A, page 193).

[104] Sean $\{f_{i,j} :\ 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq n_i\}$ conjunto de funciones independientes, $\{\phi_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq k\}$ funciones borelianas,

$$f_i(x) = \phi_i(f_{i,1}(x),\ \dots,\ f_{i,n_i}(x)),\ x \in X,\ 1 \leq i \leq k.$$

Entonces $f_1,\ \dots,\ f_k$ son independientes (cf. [19], Ch. IX, Sec. 45, Th. B, page 193).

nemos

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F} E_i\right) = \mu\left(\bigcap_{i\in F\cup\{j_1\}} E_i \bigcup \bigcap_{i\in F} E_i - E_{j_1}\right)$$

$$= \mu\left(\bigcap_{i\in F\cup\{j_1\}} E_i\right) + \mu\left(\bigcap_{i\in F} E_i - E_{j_1}\right),$$

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F} E_i - E_{j_1}\right) = \prod_{i\in F}\mu\left(E_i\right) - \prod_{i\in F\cup\{j_1\}}\mu\left(E_i\right)$$

$$= \left(1 - \mu\left(E_{j_1}\right)\right)\prod_{i\in F}\mu\left(E_i\right).$$

Supongamos el resultado cierto para $\sharp G < n_1,\ n_1 > 1$, y sea G un subconjunto de n_1 enteros positivos, digamos $G = \{j_s\}_{1\leq s\leq n_1}$. Como

$$\bigcap_{\substack{i\in F,\\ 1\leq k\leq n_1-1}} E_i - E_{j_k} = \bigcap_{\substack{i\in F,\\ 1\leq k\leq n_1}} E_i - E_{j_k} \bigcup \bigcap_{\substack{i\in F\cup\left\{j_{n_1}\right\},\\ 1\leq k\leq n_1-1}} E_i - E_{j_k}$$

y la unión es disjunta, por la hipótesis inductiva tenemos

$$\mu\left(\bigcap_{i\in F,\ 1\leq k\leq n_1} E_i - E_{j_k}\right) = \prod_{i\in F,\ 1\leq k\leq n_1}\mu\left(E_i\right)\ \left(1 - \mu\left(E_{j_k}\right)\right),$$

y sigue el paso inductivo. En segundo lugar, si $G = \{j_1,\ j_2\},\ F = \emptyset$, tenemos

$$X - E_{j_1} = \left(X - E_{j_1}\right) \cap \left(X - E_{j_2}\right) \cup E_{j_2} - E_{j_1},$$

$$1 - \mu\left(E_{j_1}\right) = \mu\left(\left(X - E_{j_1}\right) \cap \left(X - E_{j_2}\right)\right) + \mu\left(E_{j_2}\right) - \mu\left(E_{j_1} \cap E_{j_2}\right)$$

$$= \mu\left(\left(X - E_{j_1}\right) \cap \left(X - E_{j_2}\right)\right) + \mu\left(E_{j_2}\right) - \mu\left(E_{j_1}\right)\mu\left(E_{j_2}\right).$$

Luego

$$\mu\left(\left(X-E_{j_1}\right)\cap\left(X-E_{j_2}\right)\right)=1-\mu\left(E_{j_1}\right)-\mu\left(E_{j_2}\right)+\mu\left(E_{j_1}\right)\mu\left(E_{j_2}\right)$$

$$=\left(1-\mu\left(E_{j_1}\right)\right)\left(1-\mu\left(E_{j_2}\right)\right).$$

Asumamos que $\mu\left(\cap_{j\in G}X-E_j\right)=\pi_{j\in G}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right)$ si $\sharp G<n_2$ y sea ahora $G=\left\{E_{k_j}\right\}_{1\le j\le n_2}$. Entonces

$$\mu\left(\bigcap_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}E_j^c\right)=\mu\left(\bigcap_{j\in G}E_j^c\right)+\mu\left(\bigcap_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}E_{k_{n_2}}-E_j\right).$$

Por la hipótesis inductiva y el primer caso es

$$\mu\left(\bigcap_{j\in G}E_j^c\right)=\prod_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right)-$$

$$-\mu\left(E_{k_{n_2}}\right)\prod_{j\in G-\left\{k_{n_2}\right\}}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right)$$

$$=\prod_{j\in G}\left(1-\mu\left(E_j\right)\right),$$

y sigue la hipótesis inductiva. Ahora, si $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_n\right)<+\infty$, como para cada n es $\sigma^2\left(\varkappa_{E_n}\right)=\mu\left(E_n\right)-\mu\left(E_n\right)^2$ resulta $\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^2\left(\varkappa_{E_n}\right)<+\infty$. En consecuencia, como $\{\varkappa_{E_n}\}_{n\ge1}$ es acotada $\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{E_n}$ converge a.e. $[\mu]$ (cf. [19], Ch. IX, Sec. 46, Th. D, page 199). Como $\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty}E_n$ es el conjunto de puntos en los que $\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{E_n}$ no converge la condición es suficiente. Por otra parte, si $\mu\left(\overline{\text{lím}}_{n\to+\infty}E_n\right)=0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_{E_n}$ converge a.e. y $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_n\right)<+\infty$ (cf. [19], Ch. IX, Sec. 46, Th. D, page 199).

(iii)(1) Si $u<t$ en $\mathbb{R}$ sea $x\in\pi^{-1}\left((u,t)\right)$, donde *a fortiori* es $0<t$, $u<1$. Sea $s\in\mathbb{Q}$ tal que $\pi(x)<s<t$ y sea $n\in\mathbb{N}$ tal que $s+2^{-n-1}<t$ y

$\sum_{k=1}^{n} x_k/2^k > u$. Si $y \in \{x_1\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2,\ ...\}}$ tenemos

$$u < \sum_{k=1}^{n} x_k/2^k \leq \sum_{k=1}^{n} x_k/2^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k/2^k$$

$$= \pi\left(y\right) \leq \pi\left(x\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} < s + 2^{-n-1} < t.$$

Luego $\{x_1\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2,\ ...\}}$ es entorno de x contenido en $\pi^{-1}\left(u,t\right)$ y π es continua pues $x,\ u,\ t$ son arbitrarios.

(iii)(2) $\{x\}$ es subconjunto medible de X pues

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2\ ,\ ...\}}.$$

Como dicha intersección es decreciente y X es espacio de medida finita

$$\mu\left(\{x\}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left[\{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times \{x_n\} \times \{0,1\}^{\{n+1,\ n+2\ ,\ ...\}}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0.$$

(iii)(3) Si $Y = \cup_{m=0}^{\infty} Y_m$, con $Y_m = \left\{x \in X :\ \sharp x^{-1}\left(\{0\}\right) = m\right\}$, cada Y_m es evidentemente numerable y, por (iii)(2), de medida nula.

(iii)(4) Es fácil ver que cada aplicación $\pi_n\left(x\right) = x_n,\ x \in X - Y,\ n \in \mathbb{N}$ es medible. Luego $\pi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\pi_n$ resulta medible. Ahora,

$$\pi^{-1}\left([0,1/2)\right) = \{0\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ ...\}}\ \ y\ \ \pi^{-1}\left([1/2,1]\right) = \{1\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ ...\}}.$$

Dados enteros positivos $k,\ h$ indicaremos

$$I_{k,h} = \begin{cases} \left[\left(k-1\right)/2^h, k/2^h\right) & si \quad 1 \leq k < 2^h \\ \left[\left(2^h - 1\right)/2^h, 1\right] & si \quad k = 2^h. \end{cases}$$

En particular, $\pi^{-1}(I_{1,1}) = \{0\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ \ldots\}}$, $\pi^{-1}(I_{2,1}) = \{1\} \times \mathbb{N}^{\{2,\ 3,\ \ldots\}}$. Si $l > 1$, para cada $i \in \left\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ 2^l\right\}$ quedan determinados, unívocamente, intervalos $\left\{I_{k_j,h_j}\right\}_{1 \leq j \leq l}$ tales que

$$I_{i,l} = I_{k_l,h_l} \subsetneq I_{k_{l-1},h_{l-1}} \subsetneq \ldots \subsetneq I_{k_1,h_1}.$$

Para cada $k,\ h$ es $\pi^{-1}(I_{k,h}) \subseteq \left\{x \in X :\ x_h = ((-1)^k + 1)/2\right\}$, de modo que

$$\pi^{-1}(I_{i,l}) = \prod_{j=1}^{l} \left\{\frac{(-1)^{k_j} + 1}{2}\right\} \times \{0,1\}^{\{l+1,\ l+2,\ \ldots\}}.$$

Por lo tanto

$$\mu\left[\pi^{-1}(I_{i,l})\right] = 2^{-l} = m(I_{i,l}), \tag{205}$$

donde m es la medida de Lebesgue en $[0,1]$, siendo (205) válida aún si $l = 1$. Sea $\Gamma = \{r/2^s,\ r,\ s \in \mathbb{N} : 0 \leq r/2^s \leq 1\}$, $0 < b < 1$, $\{b_p\}_{p \geq 1}$ una sucesión creciente en Γ que converge a b. Entonces

$$m([0,b)) = m\left(\cup_{p=1}^{\infty}[0,b_p)\right) = \lim_{p \to +\infty} m[0,b_p) \tag{206}$$

$$= \lim_{p \to +\infty} \mu\left[\pi^{-1}([0,b_p))\right] = \mu\left[\pi^{-1}([0,b))\right].$$

Análogamente, si $0 < a < 1$ y $\{a_q\}_{q \geq 1} \subseteq \Gamma$ es tal que $a_q \downarrow a$ escribimos

$$m((a,1]) = 1 - m[0,a] = 1 - m\left(\cap_{q=1}^{\infty}[0,a_q)\right) \tag{207}$$

$$= 1 - \lim_{q \to +\infty} m([0,a_q)) = 1 - \lim_{q \to +\infty} \mu\left[\pi^{-1}([0,a_q))\right]$$

$$= 1 - \mu\left[\pi^{-1}([0,a))\right] = \mu\left[\pi^{-1}(a,1]\right].$$

Como $a,\ b$ son arbitrarios, de (206) y (207) sigue la afirmación.

(iv)(1) Sea $\Phi : L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx) \to L^p_{\mathbb{C}}(X, d\mu)$, $\Phi(f) = f \circ \pi$, $f \in L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$. Φ está bien definida ya que si $f \in L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ está definida $f \circ \pi$ y es medible: si $B \subseteq \mathbb{C}$ es boreliano, $(f \circ \pi)^{-1}(B) = \pi^{-1}(f^{-1}(B))$. Además

$f^{-1}(B)$ es medible porque $f^{-1}(B)$ es medible Lebesgue en $[0,1]$. Como π es continua $\pi^{-1}(G)$ es de clase G_δ si $G \subseteq [0,1]$ es de clase G_δ. En particular, observamos que todo abierto de X es medible (cf. [19], Ch. VII, Sec. 38, Th. A, page 155) de modo que todo conjunto de clase G_δ también lo es. Como por (iii)(4) $\mu \circ \pi^{-1}$ se identifica con la medida de Lebesgue en $[0,1]$, la preimágen por π de conjuntos de medida nula tiene μ^*- medida nula, donde μ^* es la medida exterior inducida por μ. La completación de μ coincide con μ^* sobre la clase de conjuntos μ^*- medibles (cf. [19], Ch. III, §13, Th. C, page 56), de modo que podemos asumir que la preimágen por π de conjuntos de medida nula tiene medida nula. En consecuencia $f \circ \pi$ deviene medible, en consideración a la estructura general de conjuntos medibles Lebesgue. Además, si $1 \leq p < \infty$ tenemos

$$\int_X |f(\pi(x))|^p \ d\mu(x) = \int_0^1 |f(t)|^p \ d\left(\mu\pi^{-1}\right)(t)$$

y, por (iii)(4), $d\left(\mu\pi^{-1}\right)(t) = dt$, i.e. Φ es una isometría. Dada ahora $g \in L^p_{\mathbb{C}}(X, d\mu)$ entonces $g \circ \pi^{-1} : [0,1] \to \mathbb{C}$ es medible. Como

$$\int_0^1 \left|g\left(\pi^{-1}(t)\right)\right|^p \ dt = \int_X |g(x)|^p \ d\mu(x)$$

resulta $g \circ \pi^{-1} \in L^p_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ y $\Phi\left(g \circ \pi^{-1}\right) = g$, i.e. Φ es un isomorfismo. Si $p = \infty$, $h \in L^\infty_{\mathbb{C}}([0,1], dx)$ resulta $\|\Phi(h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Podemos suponer $h \neq 0$ y, si $0 < t < \|h\|_\infty$ el conjunto $\{s \in [0,1] : |h(s)| > t\}$ es medible Lebesgue y tiene medida positiva. Por las observaciones anteriores, $\pi^{-1}(\{|h| > t\})$ es medible y

$$\mu\left(\pi^{-1}(\{|h| > t\})\right) = \mu(\{|\Phi(h) > t|\}) = m(\{|h| > t\}),$$

de donde $t \leq \|\Phi(h)\|_\infty$. Como t y h son arbitrarios Φ deviene isométrica. La suryectividad de Φ sigue como en el caso anterior.

(iv)(2) Si $k \in \mathbb{N}_0$ y $n \in \mathbb{N}_0$ veremos que $\langle \cos(2k\pi t), f_n(t) \rangle = 0$. Evidentemente podemos suponer $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos

$$-\int_0^1 \cos(2k\pi t) \cdot f_n(t) \ dt = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left(\int_{(j-1)/2^n}^{(2j-1)/2^n} - \int_{(2j-1)/2^n}^{j/2^{n-1}} \right) \cos(2k\pi t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2k\pi} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left(2 \ \sin \frac{k\pi\,(2j-1)}{2^{n-1}} - \sin \frac{k\pi\,(j-1)}{2^{n-2}} - \sin \frac{k\pi j}{2^{n-2}} \right)$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2^{n-2}} \right) \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \sin \frac{k\pi\,(2j-1)}{2^{n-1}}.$$

Sea $c_n = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \sin\left(k\pi\,(2j-1)\,/2^{n-1}\right),\ n \in \mathbb{N}$. Evidentemente $c_1 = 0$ y, si $n > 1$, podemos escribir

$$c_n = \sum_{l=1}^{2^{n-2}} \left(\sin \frac{k\pi\,(4l-3)}{2^{n-1}} + \sin \frac{k\pi\,(4l-1)}{2^{n-1}} \right)$$

$$= 2 \ \cos \frac{k\pi}{2^{n-2}} \sum_{l=1}^{2^{n-2}} \sin \frac{k\pi\,(2l-1)}{2^{n-2}} = 2 \ \cos \frac{k\pi}{2^{n-2}} \ c_{n-1}.$$

Por lo tanto, inductivamente sigue que $c_n = 0$ para todo n y sigue la afirmación. Como $\left\|\cos\left(2k\pi t\right)\right\|_2 = 1/\sqrt{2\pi}$ el sistema $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es no total. Además, si $n,\ m,\ i,\ j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $1 \leq j \leq 2^{m+n}$, cada intervalo $\left[(i-1)\,/2^n,\ i/2^n\right)$ es unión disjunta de 2^m intervalos $\left[(j-1)\,/2^{m+n},\ j/2^{m+n}\right)$. Por (202) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ deviene enseguida conjunto ortonormal. $\square$

6.18. Un teorema de Kakutani - Markoff

(Teorema de Kakutani - Markoff, cf. [26], [22]) Sea X un espacio compacto, Γ un conjunto no vacío de funciones continuas sobre X. Si Γ es conmutativo para la composición existe $\mu \in \mathrm{M}\,(X)$ tal que $\widetilde{u}\,(\mu) = \mu$ para toda $u \in \Gamma$, donde $\widetilde{u}\,(\mu) \in \mathrm{M}(X)$ es la medida naturalmente inducida sobre X por cada $u \in \Gamma$ y $\mu \in \mathrm{M}\,(X)$.[105]

Solución

Si $u \in \Gamma$ consideremos

$$\widetilde{u} : \mathrm{M}\,(X) \to \mathrm{M}(X),\ \ \langle g, \widetilde{u}\,(\mu)\rangle = \langle g \circ u, \mu\rangle\,,\ \ \mu \in \mathrm{M}\,(X)\,,\ g \in C(X).$$

[105] En particular, μ se dice que es una *medida invariante respecto a* Γ.

Evidentemente, $\widetilde{u}$ es lineal y débilmente continua. Sea

$$\Gamma' = \{\Lambda_{u,n} : \ u \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}\},$$

donde para $u \in \Gamma, \ n \in \mathbb{N}$ escribimos $\Lambda_{u,n} = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{u^{i-1}}$. Sea Γ'' el conjunto de composiciones (en número finito) de elementos de Γ'. Si K es el cono de medidas positivas sobre X de masa total uno entonces K es convexo y débilmente compacto. Además, si $u \in \Gamma$ entonces $\widetilde{u}(K) \subseteq K$ y, por la convexidad de K, $\Lambda_{u,n}(K) \subseteq K$ si $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia K es Γ'' invariante. Si $\Xi = \{\vartheta(K) : \ \vartheta \in \Gamma''\}$ entonces Ξ es una *base de filtros* en K, pues si $\vartheta_1, \ \vartheta_2 \in \Gamma''$ existe $\vartheta_0 \in \Gamma''$ tal que $\vartheta_0(K) \subseteq \vartheta_1(K) \cap \vartheta_2(K)$. Para ello, basta hacer $\vartheta_0 = \vartheta_1 \circ \vartheta_2$, observar que ϑ_1 y ϑ_2 conmutan y $\vartheta_j(K) \subseteq K, \ j = 1, \ 2$. Fijado $\vartheta \in \Gamma''$ el conjunto $\vartheta(K)$ es subconjunto débilmente compacto de K, como sigue considerando redes en K y la estructura de elementos de Γ''. Como Ξ tiene la propiedad de intersección finita y K es débilmente compacto $\cap \ \Xi \neq \emptyset$. Si $\mu_0 \in \cap \ \Xi$, $n \in \mathbb{N}, \ u \in \Gamma$ existe $\mu \in K$ tal que $\mu_0 = \Lambda_{u,n}(\mu)$. Si $f \in C(X)$ escribimos

$$|\langle f, \ \widetilde{u}(\mu_0) - \mu_0\rangle| = |\langle f \circ u - f, \ \mu_0\rangle| = |\langle f \circ u - f, \ \Lambda_{u,n}(\mu)\rangle|$$

$$= 1/n \ \left| \left\langle f \circ u - f, \ \sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{u^j}(\mu) \right\rangle \right|$$

$$= \left| \frac{\langle f \circ u^n - f, \mu\rangle}{n} \right| \leq 2 \|f\| / n,$$

de donde $\|\widetilde{u}(\mu_0) - \mu_0\| \leq 2/n$ y, como n es arbitrario, sigue que $\widetilde{u}(\mu_0) = \mu_0$. $\square$

6.19. Funciones compresibles e incompresibles sobre un espacio localmente compacto. Teorema de recurrencia de Poincaré.

Sea X espacio localmente compacto, Σ la $\sigma-$ álgebra de conjuntos medibles respecto a una medida positiva μ sobre $X, \ u : X \to X$ una función continua tal que $\mu(u^{-1}(Z)) = 0$ si $Z \in N_\mu$, donde N_μ es la subclase de

Σ de conjuntos de medida nula.[106]Si n es un entero no negativo y $A \subseteq X$ denotaremos $u^{-n}(A)$ al conjunto $(u^n)^{-1}(A)$. También escribiremos

$$A_{ent} = \cup_{n=0}^{\infty} u^{-n}(A),\ A_{ret} = A \cap u^{-1}(A_{ent}),\ A_{ret\ \inf} = A \bigcap \cap_{n=0}^{\infty} u^{-n}(A_{ent}). \tag{208}$$

Diremos que un conjunto medible A *es de clase* ω respecto a u si $\{u^{-n}(A)\}_{n\geq 0}$ es sucesión disjunta, en cuyo caso escribiremos $A \in \omega[u]$. u se dirá *incompresible* si para cada $A \in \Sigma$ tal que $u^{-1}(A) \subseteq A$ resulta $A - u^{-1}(A) \in N_\mu$. u se dirá *compresible* si no es incompresible.

(i) Son equivalentes: (a) $\omega[u] \subseteq N_\mu$. (b) Si $A \in \Sigma,\ A - A_{ret} \in N_\mu$. (c) u es incompresible. (d) Si $A \in \Sigma,\ A - A_{ret\ \inf} \in N_\mu$.

(ii) u es compresible sii existe $f : X \to \mathbb{R}$ función medible tal que $f \circ u \geq f$ y $\mu(\{f \circ u > f\}) > 0$. [107]

(iii) (Teorema de recurrencia de Poincaré) Si X es compacto y u es invariante respecto a μ entonces u es incompresible.

(iv) Si X tiene una base numerable de abiertos y u es incompresible existe $Z \in N_\mu$ tal que para todo $x \notin Z$ y todo entorno U de x en X es $u^n(x) \in U$ para infinitos enteros positivos $n's$.

Solución

[106]Sea $\mathcal{S}_i(X)$ (resp. $\mathcal{S}_s(X)$) la clase de funciones $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ semicontinuas y acotadas inferiormente (resp. semicontinuas y acotadas superiormente) por alguna función continua. Si $f \in \mathcal{S}_i(X)$ (resp. $f \in \mathcal{S}_s(X)$) escribimos $\mu^*(f) = \sup_{g\in C(X):\ g\leq f} \langle g, \mu\rangle$ (resp. $\mu_*(f) = \inf_{g\in C(X):\ g\geq f} \langle g, \mu\rangle$). Además, si $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función arbitraria definimos $\mu^*(h) = \inf_{f\in\mathcal{S}_i(X):\ f\geq h} \mu^*(f)$ (resp. $\mu_*(h) = \sup_{f\in\mathcal{S}_s(X):\ f\leq h} \mu_*(f)$). Entonces

$$N_\mu = \{Z \in \mathcal{P}(X) :\ \mu^*(\varkappa_Z) = 0\}$$

y Σ contiene a los subconjuntos de X que son unión disjunta de un conjunto de N_μ y de una sucesión de subconjuntos compactos (cf. [11], Ch. XIII, §9, page 134). Por ello, en las condiciones presentes, $u^{-1}(A) \in \Sigma$ para cada $A \in \Sigma$. Si $B \subseteq X$ se indica $\mu^*(B) = \mu^*(\varkappa_B)$, $\mu_*(B) = \mu_*(\varkappa_B)$ (*medidas exterior e interior de* B respectivamente). *A fortiori*, si $B \in \Sigma$ ambas cantidades coinciden y se denota $\mu(B)$ al valor común (cf. [11], Ch. XIII, §7, page 123).

[107]Sea u compresible, n entero positivo mayor que uno, $f : X \to \mathbb{R}$ función medible tal que $f \circ u \geq f$ y $\mu(\{f \circ u > f\}) > 0$. Como $f \circ u^n \geq f \circ u^{n-1} \geq ... \geq f$ tenemos $\{f \circ u > f\} \subseteq \{f \circ u^n > f\}$ y, por lo tanto, u^n será compresible.

$[(a) \Rightarrow (c)]$ Si $\mu\left(u^{-1}(A)-A\right)=0$ para cada $A \in \Sigma$ tal que $A \subseteq u^{-1}(A)$ entonces u es incompresible. En efecto, si $B \in \Sigma$ es tal que $u^{-1}(B) \subseteq B$ entonces $X - B \subseteq X - u^{-1}(B)$ y $X - u^{-1}(B) = u^{-1}(X-B)$. En consecuencia $\mu\left(u^{-1}(X-B) \cap B\right) = 0$ y, como

$$u^{-1}(X-B) \cap B \supseteq B - u^{-1}(B)$$

es $\mu\left(B - u^{-1}(B)\right) = 0$. Ahora, si u es compresible existe $C \in \Sigma$ tal que $C \subseteq u^{-1}(C)$ y $\mu\left(u^{-1}(C) - C\right) > 0$. Sea $D = u^{-1}(C) - C$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in D \cap u^{-p}(D)$. Como $C \subseteq u^{-1}(C)$ y $D \subseteq u^{-1}(C)$ es $u^{p}(x) \in C \cap D$, lo que es imposible porque $C \cap D = \emptyset$. Si además $n \in \mathbb{N}_0$ resulta

$$u^{-n}(D) \cap u^{-n-p}(D) = u^{-n}\left(D \cap u^{-p}(D)\right) = \emptyset.$$

Como D es medible $D \in \omega[u]$. Pero $\mu(D) > 0$ contradice (a).

(i) $[(c) \Rightarrow (b)]$ Si $A \in \Sigma$ por (208) es $u^{-1}(A_{ent}) \subseteq A_{ent}$. Luego

$$A_{ent} - u^{-1}(A_{ent}) \in N_\mu$$

$$y$$

$$A - A_{ret} = A - u^{-1}(A_{ent}) \subseteq A_{ent} - u^{-1}(A_{ent}),$$

de donde $A - A_{ret} \in N_\mu$. $[(b) \Rightarrow (a)]$ Si $A \in \omega[u]$, como $\{u^{-n}(A)\}_{n \geq 0}$ es sucesión disjunta podemos escribir

$$A - A_{ret} = \cap_{n=1}^{\infty}\left(A - u^{-n}(A)\right) = A, \tag{209}$$

y por hipótesis resulta $A \in N_\mu$.

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Observar que la identidad (209) es válida si $A \in \omega[u]$.

$[(a) \Rightarrow (d)]$ Podemos escribir $A - A_{ret\ \inf} = \cup_{m=0}^{\infty} B_m$, donde

$$B_m = \cap_{n=m}^{\infty}\left(A - u^{-n}(A)\right),\ m \in \mathbb{N}_0.$$

Fijado m tenemos $B_m \in \omega[u]$, pues es medible y, si $r \in \mathbb{N}_0$,

$$u^{-r}(B_m) = \cap_{n=m}^{\infty}\left(u^{-r}(A) - u^{-n-r}(A)\right),$$

de manera que $\{u^{-r}(B_m)\}_{r \geq 0}$ es una sucesión inyectiva. Por la hipótesis deducimos que $A - A_{ret\ \inf} \in N_\mu$.

$[(d) \Rightarrow (b)]$ Notar que $A - A_{ret\ \inf} \supseteq A - A_{ret}$.

(ii) Si u es compresible sea $A \in \Sigma$ tal que $A \subseteq u^{-1}(A)$ y $\mu\left(u^{-1}(A) - A\right) > 0$. Entonces

$$\varkappa_A(u(x)) = 1 = \varkappa_A(x) \quad si \quad x \in A,$$

$$\varkappa_A\left(u\left(x\right)\right) \geq 0 = \varkappa_A(x) \quad si \quad x \notin A$$

y basta considerar $f = \varkappa_A$. Recíprocamente, por hipótesis existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\mu\left(\{f < r < f \circ u\}\right) > 0$. Como $f \circ u \geq f$ es

$$u^{-1}\left(\{f > r\}\right) \supseteq \{f > r\}.$$

Si u fuese incompresible $\mu\left(u^{-1}\left(\{f > r\}\right) - \{f > r\}\right) = 0$. Pero

$$\{f < r < f \circ u\} \subseteq u^{-1}\left(\{f > r\}\right) - \{f > r\},$$

y u es necesariamente compresible.

(iii) Por la compacidad de X y el teorema de Markoff - Kakutani hay alguna medida invariante respecto a u. Si μ es $u-$ invariante entonces $\langle f \circ u, \mu \rangle = \langle f, \mu \rangle$ para cada $f \in C(X)$. Sea C compacto tal que $C \subseteq u^{-1}(C)$. $\varkappa_C$ y $\varkappa_{u^{-1}(C)}$ son scs porque C y $u^{-1}(C)$ son cerrados (cf. [11], Ch. XII, 12.7.4, page 25). Podemos escribir

$$\mu\left(C\right) = \mu_*\left(\varkappa_C\right) = \inf_{g \in C(X):\ g \geq \varkappa_C} \langle g, \mu \rangle = \inf_{g \in C(X):\ g \geq \varkappa_C} \langle g \circ u, \mu \rangle$$

$$\geq \inf_{h \in C(X):\ h \geq (\varkappa_C) \circ u} \langle h, \mu \rangle = \mu_*\left(\varkappa_{u^{-1}(C)}\right) = \mu\left(u^{-1}(C)\right) \geq \mu\left(C\right).$$

Como $\mu\left(u^{-1}\left(Z\right)\right) = 0$ si $Z \in N_\mu$, de la estructura de los elementos de Σ concluímos que $\mu\left(u^{-1}(A)\right) = \mu\left(A\right)$ si $A \in \Sigma$. Si $A \subseteq u^{-1}(A)$ y $A \in \Sigma$, como μ es finita $u^{-1}(A) - A \in N_\mu$ y u es incompresible.

(iv) Sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de abiertos de X, $Z = \cup_{n=1}^{\infty} V_n - (V_n)_{ret\ \inf}$. Si u es incompresible $Z \in N_\mu$. Sea $x \notin Z$, $U \subseteq X$ entorno de x, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in V_{n_0}$ y $V_{n_0} \subseteq U$. Como

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n - \overline{\lim}_{m \to +\infty}\ u^{-m}\left(V_n\right)$$

es $x \in \overline{\lim}_{m \to +\infty}\ u^{-m}\left(V_{n_0}\right)$ y sigue (iv). $\square$

6.20. Una medida boreliana no regular en el plano real.

Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$ con la siguiente topología λ: un subconjunto es abierto si y solo si su intersección con cada recta vertical es abierta en dicha recta respecto a la topología usual de $\mathbb{R}$. Luego $(\mathbb{R}^2, \lambda)$ es espacio de Hausdorff localmente compacto y, si $f \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$, hay un conjunto finito $F_f \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - F_f \times \mathbb{R}$. La relación

$$\Lambda f = \sum_{x \in F_f} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dy,\ f \in C_c\left(\mathbb{R}^2, \lambda\right),$$

define un operador $\Lambda \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)^*_+$. La única medida de Borel μ que realiza a Λ según el teorema representación de F. Riesz es *no regular.* [108]

Solución

Claramente λ es una topología separada; $\{x\} \times (y-1, y+1)$ es entorno $\lambda-$ abierto de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con clausura $\{x\} \times [y-1, y+1]$ compacta. Si $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es $\lambda-$ compacto, como $\{\{x\} \times \mathbb{R}\}_{x \in \mathbb{R}:\ (\exists y \mathbb{R})/(x,y) \in K}$ es cubrimiento $\lambda-$ abierto de K, existe $G \in \mathcal{P}_f(\mathbb{R})$ tal que $K \subseteq \cup_{x \in G} \{x\} \times \mathbb{R}$. Por ello Λ está bien definida y es un funcional lineal positivo sobre $C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$. Sea μ la medida de Borel asociada, $V \in \lambda$ tal que $\mathbb{R}\times \{0\} \subseteq V$. Si $x \in \mathbb{R}$ sea $0 < \varepsilon_x < 1$ tal que $\{x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \subseteq V$ y $W = \cup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)$, de modo que $W \in \lambda$ y $\mathbb{R}\times \{0\} \subseteq W \subseteq V$. Como $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^{\infty} \{x : 1/(n+1) < \varepsilon_x < 1/n\}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto $I = \{x : 1/(n_0+1) < \varepsilon_x < 1/n_0\}$ es infinito (más aún, no numerable). Si $F \in \mathcal{P}_f(I)$ sea $f \in C_c(\mathbb{R}^2, \lambda)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $\operatorname{supp}(f) \subseteq \cup_{x \in F} \{x\} \times (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)$ y $f(x,y) = 1$ si $|y| \leq \varepsilon_x/2$ y $x \in F$. Entonces (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.14, (1), page 43)

$$\mu(V) \geq \mu(W) \geq \Lambda f \geq \sum_{x \in F} \varepsilon_x > (\sharp F) / (n_0 + 1)$$

y, como F es arbitrario, $\mu(V) = +\infty$. Así $\mu(\mathbb{R}\times \{0\}) = +\infty$ porque V es arbitrario (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.14, (c), page 42). Por otra parte, si C

[108] Una medida positiva μ definida sobre la $\sigma-$ álgebra de Borel de conjuntos de un espacio de Hausdorff localmente compacto X es *regular* si, para cada conjunto de Borel E de X, se verifica

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) :\ U \supseteq E,\ U - \text{ abierto}\}$$

$$= \sup\{\mu(K) :\ K \subseteq E,\ K - \text{ compacto}\}.$$

es subconjunto compacto de $\mathbb{R}\times\{0\}$ deducimos, por la observación sobre la estructura de conjuntos $\lambda-$ compactos, que C se reduce a un número finito de puntos. Como $\mu(C)=\inf\{\Lambda g:\ g\in C_c(\mathbb{R}^2,\lambda)\}$ (cf. [43], Ch. 2, Th. 2.14, (7), page 44), si $(a,0)\in C$ y $\delta>0$ sea $g\in C_c(\mathbb{R}^2,\lambda)\,,\ 0\leq g\leq 1$,

$$\operatorname{supp}(g)\subseteq\{a\}\times[-\delta/2,\delta/2]\,.$$

Entonces $\mu(\{(a,0)\})\leq\Lambda g\leq\delta$ y como δ es arbitrario $\mu(\{(a,0)\})=0$. Luego $\mu(C)=0$ y, como $\mathbb{R}\times\{0\}$ es boreliano, μ es no regular. □

Referencias

[1] R. Adams: *Sobolev spaces.* Acad. Press, USA, 1975.

[2] M. Ahues, A. Largillier & B. Limaye: *Spectral computations for bounded operators.* Chapman & Hall/CRC. Appl. Math. **18**, 2001.

[3] R. Arens: *Note on convergence in topology.* Math. Mag., **23**, 229 - 234, 1950.

[4] M. Atiyah & I. Macdonald: *Introduction to commutative algebra.* Addison - Wesley Publ. Co., 1969, G. B..

[5] S. Banach: *Théorie des operations linéaires.* Monografie Mat., Vol. 1, Warsawa, 1932.

[6] J. Cerdá: *Análisis real.* Edicions de la Universitat de Barcelona. 1996.

[7] J. Clarkson: *Uniformly convex spaces.* Trans. A. M. S. **40**, 396 - 414, 1936.

[8] J. Conway: *Functions of one complex variable.* N. Y.. Springer - Verlag, 1978.

[9] J. Conway: *A course in functional analysis.* 2nd. ed., Springer - Verlag, N. Y., 1990.

[10] C. Cowen & B. Maccluer: *Composition operators on spaces of analytic functions.* CRC Press, 1995, USA..

[11] J. Dieudonné: *Treatise on analysis.* Volume II, Acad. Press Inc., London, 1976.

[12] J. Dieudonné: *Fundamentos de análisis moderno.* Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

[13] R. Douglas: *Banach algebra techniques in operator theory.* 2nd. ed., Springer - Verlag, N. Y., 1998.

[14] J. Dugundji: *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston. 1973.

[15] N. Dunford: *Spectral theory I, convergence to projections.* Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 1943, 185 - 217.

[16] P. Duren: *Theory of H^p spaces.* Dover Publ. Inc., Canadá, 2000.

[17] I. Gel ´fand & N. Vilenkin: *Generalized functions. Appl. of harminic analysis.* Vol. 4, Acad. Press, U.K., 1964.

[18] R. Gordon: *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* Graduate Studies in Math., Vol. 4, American Math. Soc.. 1994, USA..

[19] P. Halmos: *Measure Theory.* D. Van Nostrand Co., 1964, USA..

[20] P. Halmos: *A Hilbert space problem book.* 2nd. ed. N. Y.: Springer - Verlag, 1982.

[21] R. Kadison & J. Ringrose: *Fundamentals of the theory of operator algebras.* Vol. I. Graduate Studies in Math., Vol. 15. Amer. Math. Soc., 1997.

[22] S. Kakutani: *Two fixed point theorems concerning bicompact convex sets.* Proc. Imp. Akad., Tokio **14**, 1938, 242 - 245.

[23] J. Kelley: *Topología general.* EUDEBA, 1975.

[24] A. Kolmogorov & S. Fomin: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* Ed. MIR, Moscú, 1975.

[25] A. Kilbas, O. Marichev & S. Samko: *Fract. integrals and derivatives.* Gordon and Breach Sc. Publ., Amsterdam, 1993.

[26] A. Markoff: *Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **10** (1936), 311 - 314.

[27] S. Lipschutz: *Teoría y problemas de álgebra lineal.* McGraw - Hill, México, 1979.

[28] D. Milman: *On some criteria for the regularity of spaces of type (B).* Dokl. Akad. Nauk SSSR **20**, 243 - 246, 1938.

[29] W. Novinger: *Mean convergence for L^p spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., **34**, 627 - 628, 1972.

[30] W. Orlicz: *Beitrage zur theorie der orthogonalent wicklungen.* II, Studia Math. **1**, 241 - 255, 1929.

[31] C. Peña: *Integración fraccionaria iterada.* Actas del 2do. Congreso Dr. A. Monteiro. Dpto. de Matemáticas - Inst. de Matemáticas. UNSur, BB, Argentina, 1993, págs. 79 - 93.

[32] C. Peña: *On Hadamard algebras.* Le Matematiche, volume LV, fascicolo I, 43 - 54. Catania, Italia, 2000.

[33] C. Peña: *Closed principal ideals on Hadamard rings.* International Journal of Appl. Math., Vol. 4, no. 1, Bulgaria, 23 - 26, 2000.

[34] C. Peña: *Elements of sequence algebras.* Novi Sad Journal of Math., Vol. 31, no 2, Yugoslavia, 2001.

[35] C. Peña: *A non denseness result.* Actas del VI Congreso Dr. A. Monteiro. Dpto. de Matemáticas - Inst. de Matemáticas. UNSur, BB, Argentina, 2001.

[36] C. Peña: *On Hadamard - Dirichlet algebras.* Acta Math. Univ. Comenianae. Vol. LXXI, **1**, Slovak Republic, 9 - 17, 2002.

[37] B. Pettis: *Linear functionals and completely additive set functions.* Duke Math. J., **4**, 552 - 565, 1938.

[38] B. Pettis: *A proof that every uniformly convex space is reflexive.* Duke Math. J. **5**, 249 - 253, 1939.

[39] A. Pietsch: *Eigenvalues and s - numbers.* Cambridge University Press, 1987.

[40] M. Reed & B. Simon: *Methods of modern mathematical physics. I: Functional analysis.* Acad. Press, Inc.. UK, 1980.

[41] H. Royden: *Real Analysis.* MACMILLAN Publ. Co., Inc., N.Y., 1968.

[42] W. Rudin: *Functional analysis.* McGraw - Hill, Inc., 1979.

[43] W. Rudin: *Real and complex analysis.* McGraw - Hill Series in Higher Math., 1974.

[44] M. Stone: *Topological representations of distributive lattices and browerian logics.* Časopis Pěst. Mat. Fys., **67**, 1937, 1 - 27.

[45] F. Treves: *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Acad. Press. N. Y. - London, 1967.

[46] J. von Neumann, Math. Ann., vol. 102, 370 - 427, 1930.

[47] W. Veech: *A second course in complex analysis.* W. A. Benjamin, Inc., N. Y., Amsterdam, 1967.

[48] H. Wallman: *Lattices and topological spaces.* Ann. of Math., (2), **42**, (1941), 687 - 697.

[49] R. Wheeden & A. Zygmund: *Measure and integral. An introduction to real analysis.* Marcel Dekker Inc., N. Y., 1977.