

CAPÍTULO IV

Matemática en Nuestro Cuerpo

Introducción

Los fractales son estructuras geométricas que se pueden usar para analizar muchas estructuras biológicas que no son compatibles con análisis convencionales. El propósito de este capítulo es exhibir el análisis fractal y mostrar cómo se puede aplicar al análisis del hueso trabecular, a la estructura del árbol bronquial y al análisis de las arritmias cardiacas.

Modelos simples de estructuras biológicas se pueden construir con formas simples tales como rectas, círculos, esferas y polígonos simples. Podemos estimar propiedades de la estructura, tales como longitud, área, volumen, dureza, etc.

Una sección de un vaso sanguíneo puede ser modelada como un cilindro mientras que la Tierra puede modelarse como una esfera.



Una sección de un vaso sanguíneo puede ser modelada como un cilindro mientras que la Tierra puede modelarse como una esfera.

Pero existen muchas estructuras biológicas que no pueden modelarse con formas simples. Uno de los patrones más comunes es la estructura ramificada que aparece en muchas estructuras biológicas. Las estructuras ramificadas en el cuerpo humano incluyen las arterias, venas, nervios, el Haz de His, los ductos de la glándula parótida y el árbol bronquial entre otros.

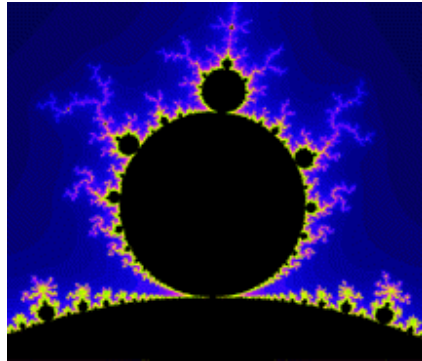


Las estructuras ramificadas como el sistema circulatorio no pueden modelarse con formas simples.

Otros Procesos Fractales en la Naturaleza

- Distribución Regional del flujo sanguíneo pulmonar
- Estructura Pulmonar alveolar
- Patrón del parénquima mamográfico como un riesgo de cáncer mamario
- Heterogeneidad del flujo sanguíneo en la región del miocardio
- Superficies fractales de las proteínas
- Distribución de las longitudes corporales de los artrópodos

Una de las propiedades más interesantes de los fractales es la autosimilaridad. El conjunto de Mandelbrot es un buen ejemplo de esto. La figura completa se ve repetida en escalas más pequeñas en algunas partes. Un objeto fractal como éste exhibe esta autosimilaridad en muchas escalas de observación, desde el objeto completo hasta niveles microscópicos (infinitesimales).



El conjunto de Mandelbrot presenta autosimilaridad, es decir, la figura se ve repetida en escalas más pequeñas.

Otra propiedad de los objetos fractales es la falta de una escala bien definida. Un ejemplo de esto lo podemos ver en la imagen de abajo o en las nubes, las cuales tienden a verse muy similares sin importar su tamaño. Otra manera de decir esto, es que, es difícil decir qué tan grande es el objeto sin una referencia externa.



No podemos decir de qué tamaño es este objeto fractal, pues no tenemos referencias externas.

Mostrar que existe una geometría fractal en órganos y organismos vivos es de gran relevancia en las ciencias biomédicas pues permite explicar y proponer nuevas causas y consecuencias que

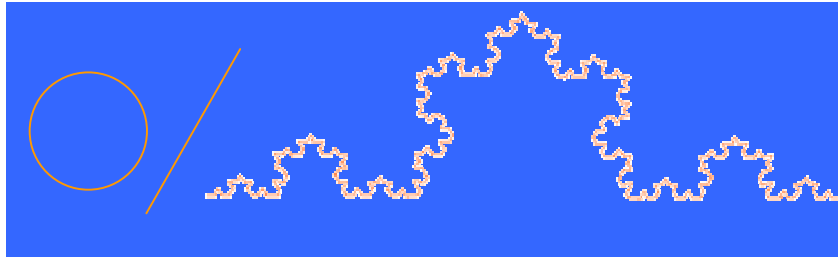
relacionan la estructura y su función. Entre éstas se encuentran la relación de la geometría y la salud, su relación con las leyes alométricas o la dualidad del tiempo intrínseco en el que pueden reconocerse un tiempo Euclideo asociado a la velocidad constante de transporte en estructuras cilíndricas y un tiempo fractal característico de los órganos con estructuras ramificadas autosimilares.

Las propiedades geométricas pueden ser factores limitantes del desarrollo y función de órganos y organismos y pueden ser determinantes en las diferencias entre organismos. West señala a la geometría fractal de las vías de conducción y superficies de intercambio como uno de los tres factores unificadores de las leyes alométricas.

Dimensión fractal

La mayoría de la gente está familiarizada con las tres dimensiones espaciales en que vivimos (largo, ancho y profundo). Estas dimensiones son conocidas como dimensiones topológicas euclidianas y han sido usadas por muchos años para describir la forma y posición de los objetos. Sin embargo Mandelbrot encontró que ciertos objetos geométricos no podían ser descritos con las dimensiones topológicas euclidianas usuales, y formuló la idea de una dimensión fraccionaria o fractal existente entre las dimensiones topológicas euclidianas.

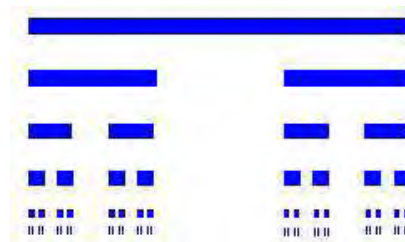
Las curvas regulares rectificables (es decir, las curvas suaves que tienen longitud finita) tienen una dimensión topológica de 1. Además, las que se van volviendo más complejas tienden a llenar el espacio a su alrededor. La cantidad de espacio que llena una de estas curvas es representado por la dimensión fractal o índice D_f , la cual podemos pensar como un “factor de llenado”.



Para la recta y el círculo D_f es igual a 1. La curva del perímetro del copo de nieve llena más espacio que la recta o el círculo y su D_f es 1.26.

La línea que dibuja el parénquima pulmonar es un patrón y llena aún más espacio. Su D_f es de alrededor 1.82

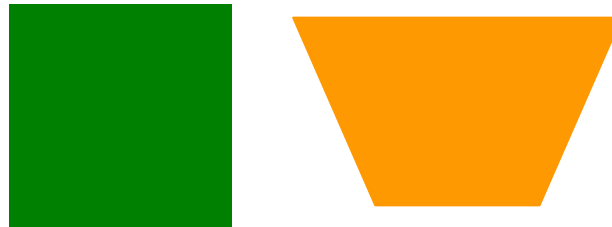
La dimensión fractal de un subconjunto de una de recta varía de 0 a 1, es 0 cuando se tiene un conjunto finito de puntos, es 1 cuando es un segmento de recta (es decir, un intervalo), está entre 0 y 1 cuando es un conjunto de puntos que “llena” parcialmente a la recta (es decir, no contiene ningún intervalo, pero tiene “muchos” puntos), por ejemplo: el conjunto ternario de Cantor tiene una dimensión fractal de $\log(2)/\log(3) \approx 0.63$.



El conjunto de Cantor se obtiene al tomar la intersección de los conjuntos C_j donde el conjunto C_0 es un segmento de recta, C_1 es el conjunto C_0 menos el interior del tercio de en medio del segmento, y en general C_j , es el conjunto C_{j-1} menos el interior de los tercios de en medio de los segmentos de recta que forman a C_{j-1} .

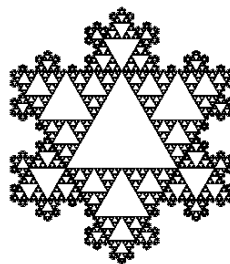
La dimensión fractal de un subconjunto de un plano varía entre 0 y 2. Está entre 0 y 1 cuando el conjunto es un conjunto de puntos que “llena” parcialmente a una curva regular rectificable (es decir, no contiene la imagen de algún intervalo bajo una función continua no constante), es 1 cuando la estructura es una curva regular rectificable como una recta o una circunferencia.

Cuando una estructura llena todo el espacio posible en un área del plano tal como el cuadrado verde o el trapecio anaranjado de abajo, su dimensión fractal es 2.



La dimensión fractal de una superficie plana como un cuadrado o un trapecio es de 2.

La dimensión fractal está entre 1 y 2 cuando “llena” parcialmente el espacio en un área (es decir, no contiene ninguna región con área positiva, pero puede contener alguna curva de longitud positiva); por ejemplo la carpeta de Sierpinski que se ilustra abajo tiene una dimensión fractal de 1.79

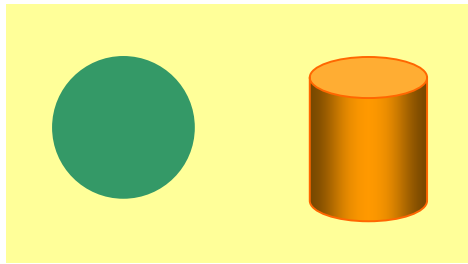


Esta carpeta de Sierpinski tiene una dimensión fractal de 1.79

La dimensión fractal de un subconjunto de un objeto tridimensional, varía entre 0 y 3. Está entre 0 y 1 cuando el

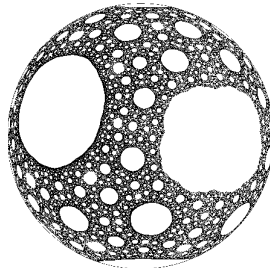
conjunto es un conjunto de puntos que “llena” parcialmente a una curva regular rectificable (es decir, no contiene la imagen de algún intervalo bajo una función continua no constante), es 1 cuando la estructura es una curva regular rectificable como una recta, una circunferencia o una hélice.

Cuando una estructura llena todo el espacio posible en una superficie de área positiva, como un círculo o la superficie de un cilindro, su dimensión fractal es 2.



Una superficie tiene dimensión fractal 2.

La dimensión fractal está entre 1 y 2 cuando “llena” parcialmente el espacio sobre una superficie (es decir, no contiene la imagen de algún rectángulo con área positiva bajo una función continua no constante, pero puede contener alguna curva de longitud positiva).



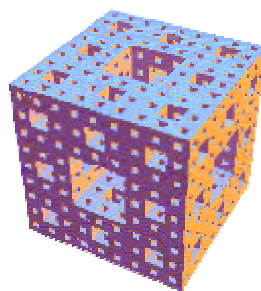
La dimensión fractal de un conjunto (que no contiene segmentos con área, pero que contiene segmentos de curvas con longitud positiva) contenido en una superficie está entre 1 y 2.

Cuando una estructura llena todo el espacio posible en un volumen del espacio tridimensional, tal como el cubo sólido o la pirámide sólida que se muestran abajo, su dimensión fractal es 3.



Un cuerpo sólido tridimensional tiene dimensión fractal 3.

La dimensión fractal está entre 2 y 3 cuando “llena” parcialmente el espacio en un volumen (es decir, no contiene ninguna región con volumen positivo, pero puede contener alguna superficie con área positiva); por ejemplo la esponja de Menger que tiene una dimensión fractal de 2.1



Esponja de Menger

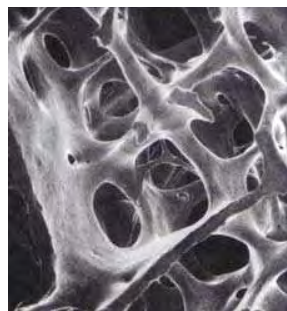
Dimensiones fractales en los huesos

Los huesos se clasifican de acuerdo a su forma como: largos, cortos, planos o irregulares.

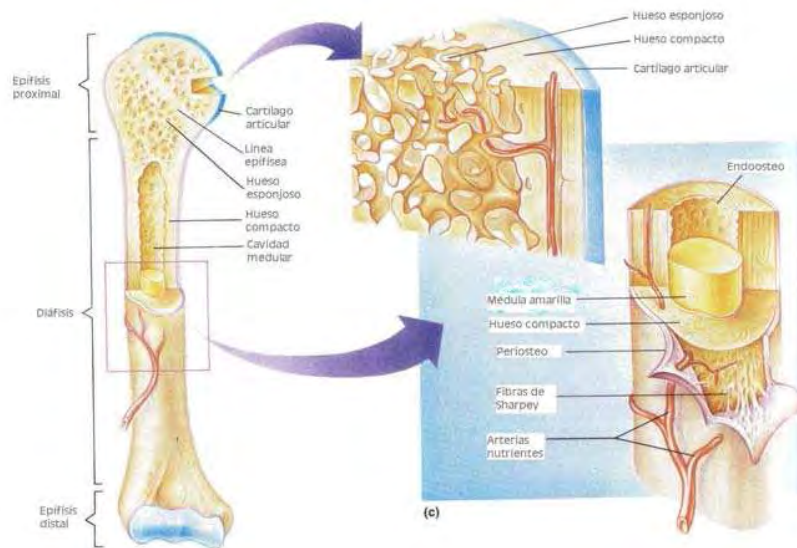


Clasificación de huesos.

Todos los huesos del esqueleto tienen una capa exterior densa que parece suave y sólida a simple vista. Esta capa externa es llamada hueso compacto. Bajo esta capa está el hueso esponjoso, una especie de panal de pequeñas piezas parecidas a agujas o piezas planas, como trabes, llamadas trabéculas. Dentro de esta red, los espacios entre las trabéculas están llenos de médula.

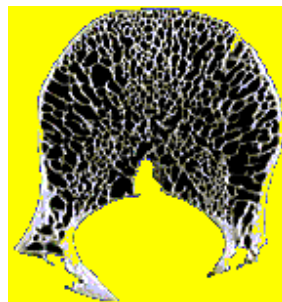


Fotografía de la trabécula de una sección de la cabeza de un fémur.



Partes de un hueso.

El hueso trabecular tiene un patrón de ramificaciones, como podemos apreciar en este hueso vertebral. También podemos ver que exhibe autosimilaridad. Es decir, las trabéculas y los espacios de médula entre sí se ven muy similares sin importar su tamaño.



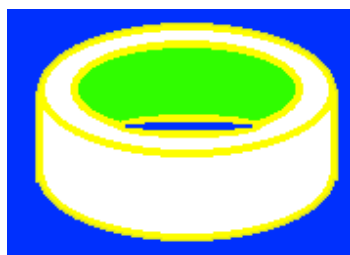
Muchos modelos de los huesos en el pasado se habían realizado modelando la fuerza de rompimiento como una simple función de la densidad mineral del hueso. La densidad del hueso está fuertemente relacionada con la fuerza de rompimiento. Además

existen variaciones biológicas en la fuerza de rompimiento en pacientes con la misma densidad de hueso.

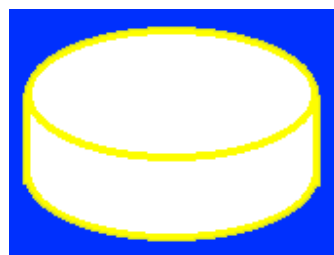
Los investigadores han podido crear modelos más refinados de fuerza ósea. Algunos de éstos modelos están basados en la idea de que no es sólo la cantidad de mineral que se tiene en un hueso dado, sino también cómo está acomodado en ese hueso lo que determina la fuerza del hueso.

Actualmente se utilizan modelos de análisis de elemento finito de la fuerza ósea con poco éxito en la predicción de fuerza ósea. Además estos modelos son muy complejos y es poco probable que se conviertan clínicamente útiles para los pacientes en un futuro cercano. La idea del índice fractal del hueso trabecular puede relacionarse con la fuerza ósea, es de llamar la atención, ya que calcular el índice fractal del hueso trabecular es simple a partir de imágenes de Tomografía Computarizada de un hueso dado.

La imagen de abajo muestra dos modelos posibles para un hueso. Un hueso normal es algo que se encuentra entre el cilindro hueco del hueso a la izquierda y el cilindro sólido a la derecha. Si analizamos estos dos huesos, podríamos rebanadas de tomografía computarizada de estos dos huesos, mediríamos un índice fractal de 1.0 en el hueso hueco y un índice de 2.0 en el hueso sólido. Medidas de huesos normales caen entre estos dos valores extremos (al rededor de 1.7 a 1.8), y es posible esperar que el índice fractal pueda probar ser útil en la estimación de la fuerza del hueso.



Hueso sin trabécula
("osteoporosis") $D=1.0$

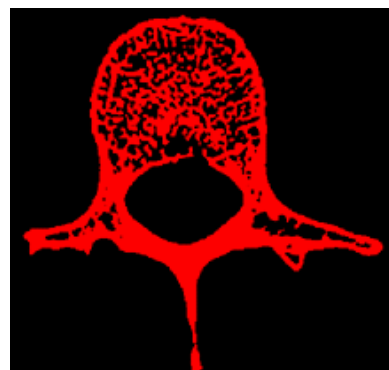


Hueso con centro sólido
("osteoporosis") $D = 2.0$

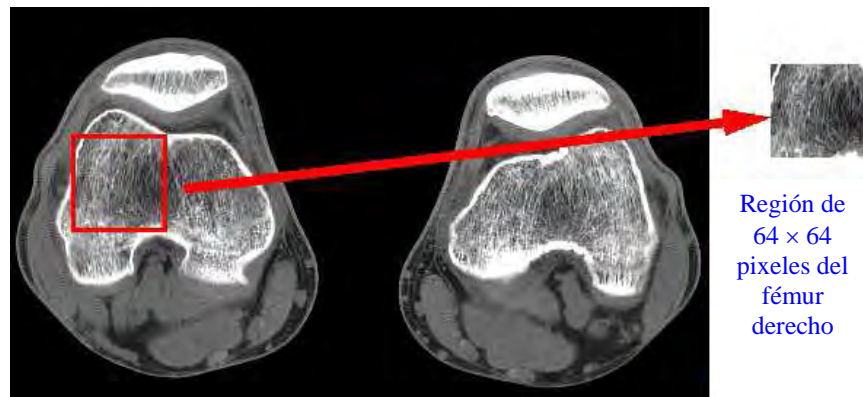
¿Cómo entonces, estimamos el índice fractal de una estructura compleja como un hueso trabecular como la vértebra de abajo?



Primero tenemos que decirle a nuestro programa de análisis de imágenes qué parte es hueso y qué parte no lo es. Esto es generalmente simple porque el hueso es mucho más denso que los tejidos suaves. En nuestro programa de análisis de imágenes, ajustamos la ventana y los controles de nivel de tal manera que sólo tejido con densidad de la tomografía computarizada sea mayor de un cierto nivel podría ser incluida en el análisis. Esto se puede hacer visualmente en nuestro software ajustando la ventana y los controles de nivel hasta que sólo el tejido de interés se muestre (en rojo), como abajo.



Una vez que estos umbrales de nivel se han puesto, el software de imágenes ahora sabe qué es hueso y que no. Ahora podemos seleccionar la región del hueso trabecular de interés para analizarla, como se muestra abajo.

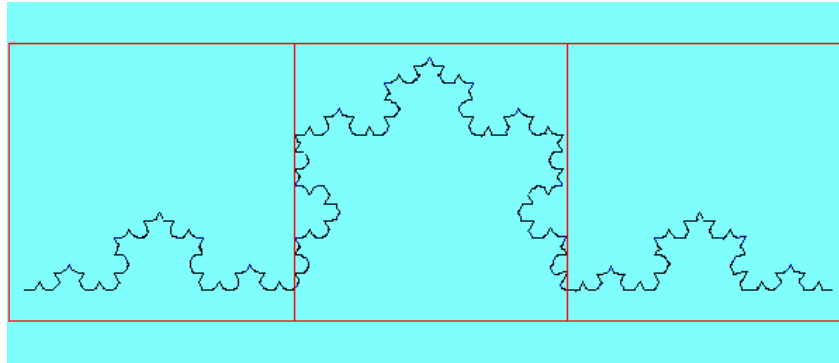


Hay una amplia variedad de algoritmos para calcular el índice fractal de una estructura, tales como el algoritmo de conteo de caja, el método de dilatación de píxel, el método de calíper, el método del espectro de la potencia radial, y otros.

Cómo calcular la dimensión fractal con el método de conteo de caja

Mostraremos el algoritmo de conteo de caja, por su sencillez. Este algoritmo estima qué tanto espacio es ocupado por la estructura fractal. Primero, se pone una malla arbitraria sobre la estructura que se medirá. Luego, contamos cuántas cajas definidas por la malla son ocupadas por la estructura fractal.

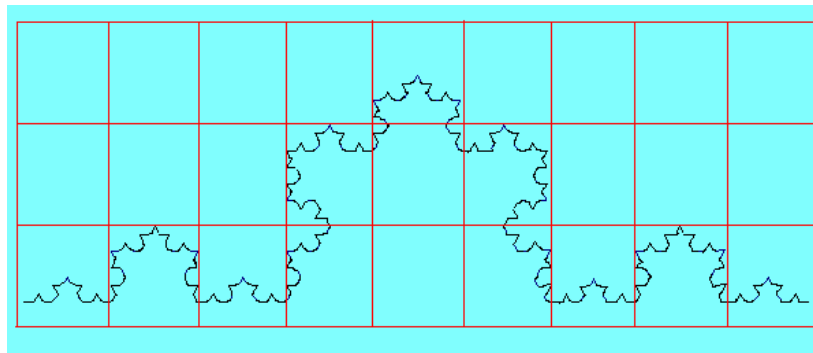
Para el objeto mostrado la estructura ocupa 3 cajas.



Este objeto fractal ocupa 3 cajas de la malla.

El proceso se repite con una malla con longitudes de la n -ésima parte del tamaño de la anterior, en nuestro caso es de la tercera parte.

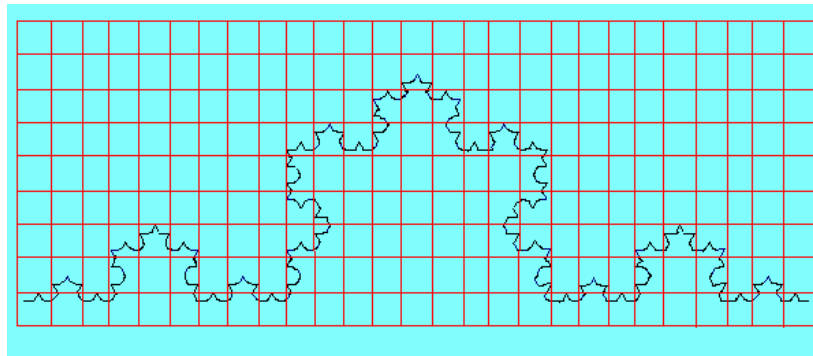
Con la malla de abajo, (que se obtuvo dividiendo en 3 partes iguales los lados de las cajas de la malla anterior, dando lugar a 9 cajas nuevas por cada caja de la malla anterior) la estructura ocupa 12 cajas.



Al dividir en 3 partes iguales cada uno de los lados de la malla anterior, obtenemos una malla más fina y el objeto fractal ocupa 12 cajas de la nueva malla.

El proceso se repite otra vez con una malla con longitudes de la n -ésima parte del tamaño de la anterior (en nuestro caso, la tercera

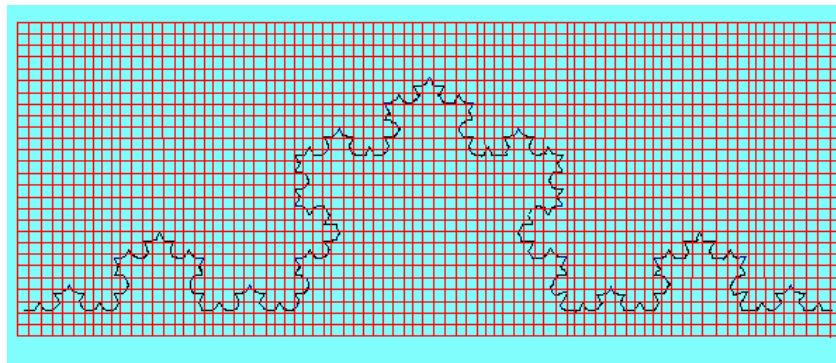
parte). Con la malla de abajo, la estructura ocupa 55 cajas.



Volvemos a dividir en 3 partes iguales cada uno de los lados de la malla anterior, obtenemos una malla más fina y el objeto fractal ocupa 55 cajas de la nueva malla.

Este proceso puede realizarse indefinidamente, usando mallas cada vez más pequeñas.

Para este ejemplo, contaremos las cajas una vez más. Con la malla de abajo, la estructura llena 405 cajas.



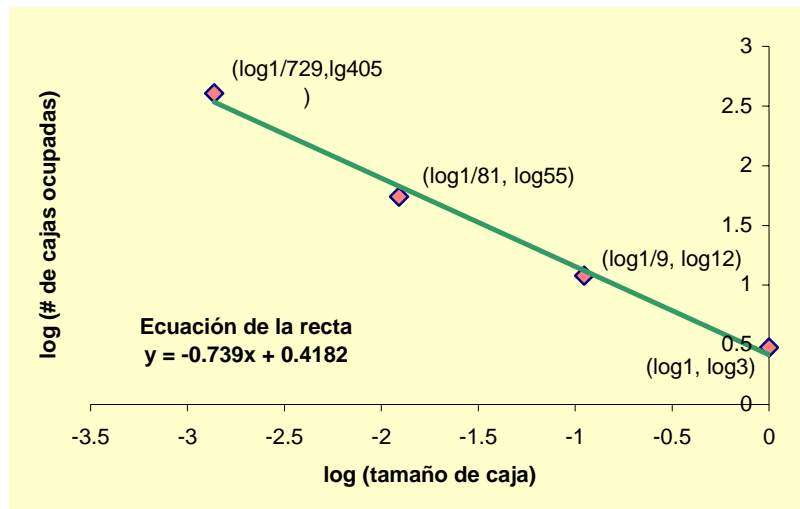
Volvemos a dividir en 3 partes iguales cada uno de los lados de la malla anterior, obtenemos una malla más fina y el objeto fractal ocupa 405 cajas de la nueva malla.

Así que nuestros datos de conteo de caja son puestos en la

siguiente tabla:

Tamaño de la caja	# de cajas ocupadas
1	3
1/9	12
1/81	55
1/729	405

Los datos son graficados en una gráfica log-log (es decir, en el eje de las abscisas se pone el logaritmo del tamaño de la caja y en el eje de las ordenadas se pone el logaritmo del número de cajas ocupadas) como se muestra abajo.

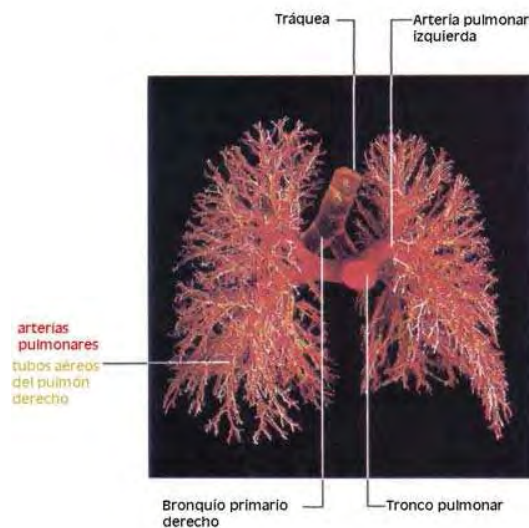


Se hace una regresión lineal para encontrar la recta que mejor se ajusta a los datos. La pendiente de esta recta es usada para calcular la dimensión fractal. En el caso del ejemplo la ecuación de la recta que mejor se ajusta es $y = -0.739x + 0.4182$. La dimensión fractal es igual a 2 más la pendiente de la recta, entonces para este objeto fractal, la dimensión fractal es $D_f = 2 + (-0.739) = 1.261$.

Árbol bronquial

Uno de los sistemas en que es más evidente la estructura geométrica, es el sistema respiratorio, pues su objetivo es distribuir un volumen de aire inhalado (por la vía aérea) en una superficie de intercambio (superficie alveolar) que se encuentra dentro de una región de volumen acotado (el tórax). Sin embargo, el diseño de un órgano no depende únicamente de su forma geométrica sino también del ajuste de las partes a su función.

El diseño del árbol bronquial de los mamíferos se ha asociado con un adecuado flujo de gases a los alvéolos, una mínima producción de entropía en la mecánica respiratoria y con un mínimo costo en materia y energía. Mandelbrot fue el primero en proponer que el pulmón de los mamíferos presenta una geometría fractal. Posteriormente varios científicos han mostrado que la reducción del diámetro de los bronquios, la superficie alveolar y el flujo pulmonar presentan propiedades fractales.



Respecto al diámetro de las vías aéreas, en los primeros estudios (en 1962) se encontraron evidencias de que el calibre de los

bronquios seguían una curva exponencial del tipo $d_n = d_o \cdot 2^{-n/3}$, denominando con d_n al diámetro de un tallo de rama bronquial de la n -ésima generación y con d_o el diámetro inicial, además (en 1991) se encontró que esta curva se encontraba asociada a la acomodación de un máximo flujo con mínimo volumen, mínima disipación de energía o mínima producción de entropía.

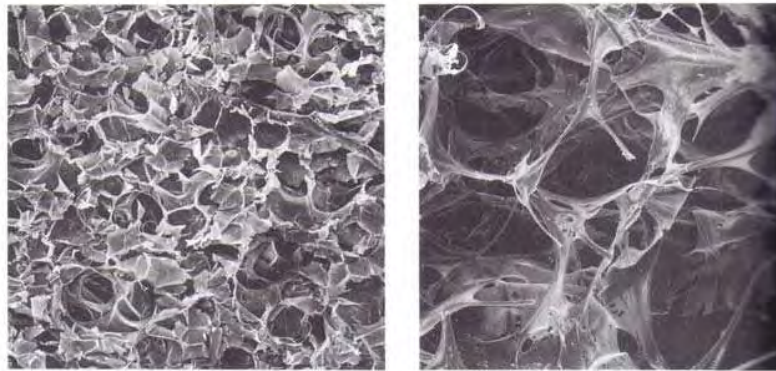
Posteriormente, se mostró que el diámetro de los bronquios más allá de la décima generación disminuye más lento que lo predicho por la relación exponencial dada en 1962, y que esto podría estar relacionado con la transición desde una zona de transporte por convección a una zona de difusión pasiva, lo cual llevó a que se propusiera como alternativa un decaimiento según la ley de potencias $d_n = A_n \cdot n^{-u}$, modulado por una función A_n , que introduce desviaciones periódicas en el factor de escala. (renormalización) que tiene como importante consecuencia un efecto de protección de errores durante el desarrollo del pulmón, evitando que una anomalía en el calibre de un bronquio se propague o aumente hacia el distal.

Algunos científicos han usado el modelo de renormalización para simular la vía aérea. Sin embargo, otros destacan que ambos tipos de modelos (el exponencial y el potencial) son válidos y obedecen a la geometría fractal unida a la asimetría del patrón de dicotomía bronquial. La cual es muy evidente en las observaciones hechas en broncografías.

A pesar de que existen muchos estudios donde se calcula la dimensión fractal del árbol bronquial no se disponen medidas directas de la forma en que el árbol bronquial ocupa el espacio (de tres dimensiones) o de la autosimilitud de éste. Aunque algunos científicos chilenos han podido tener una representación tridimensional en acrílico del árbol bronquial de algunas especies de mamíferos, cuando hacen el estudio del cálculo de las dimensiones fractales, lo hacen sobre fotografías de estos moldes, lo cual lleva a que sólo se ha medido la dimensión fractal de proyecciones del árbol bronquial y no de él como objeto en el

espacio tridimensional.

Las dimensiones fractales de estas proyecciones del árbol bronquial se encuentran entre 1.57 y 1.59. La forma en que el árbol bronquial ocupa el espacio parece ser esencialmente la misma, independientemente de diferencias importantes en la masa corporal de las distintas especies observadas.



La imagen de la izquierda muestra los alvéolos de una persona sana no fumadora, la de la derecha son los alvéolos de una persona fumadora.

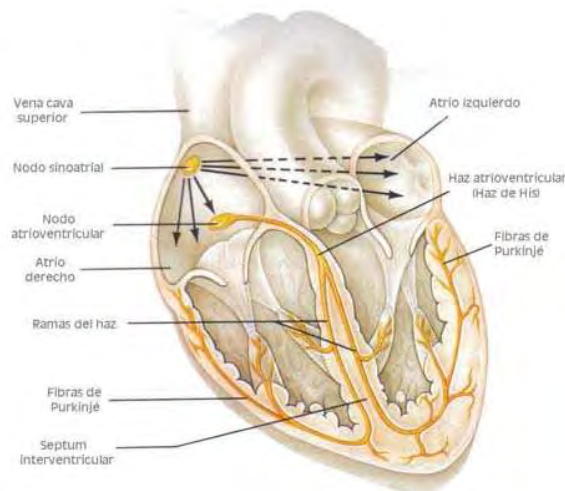
Caos cardiaco

Uno de los ritmos biológicos más conocidos es el latido del corazón. La forma en que se acostumbra estudiarlo es investigando su comportamiento biológico, químico y físico. A partir de los años ochenta del siglo pasado se ha dirigido el estudio de las propiedades globales de su comportamiento biológico considerándolas no lineales.

Existen varias áreas del corazón de los mamíferos capaces de tener una auto-excitación rítmica espontánea, pero bajo condiciones

fisiológicas el regulador normal es el nodo sino-atrial (SA).

Un impulso generado por el nodo sino-atrial se propaga a través del músculo atrial (provocando contracción atrial). La onda de despolarización se propaga a través del nodo atrio-ventricular (AV) y debajo del sistema de His-Purkinjé en los ventrículos derecho e izquierdo.



Existen muchos modelos lineales y no-lineales que describen este proceso de conducción entre los nodos sino-atrial y atrio-ventricular.

Hay estudios experimentales que usan herramientas no lineales para distinguir caos y ruido y ayudar así a entender la dinámica fisiológica.

Para ello se hacen 3 suposiciones:

- i. Un oscilador cardíaco en condiciones normales se puede describir con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con un solo estado estacionario inestable

generando un ciclo de oscilación límite asintóticamente estable el cual está globalmente atrayendo excepto para un conjunto de medida cero de puntos singulares.

- ii. Siguiendo una perturbación corta, el curso del tiempo de retorno al ciclo límite es mucho más corto que el período espontáneo de oscilación o del tiempo entre pulsos periódicos.
- iii. Las características topológicas de la curva de transición de fase cambian en formas estereotipadas cuando la fuerza del estímulo aumenta.

Si Φ_i es la fase del oscilador cardiaco inmediatamente antes del i -ésimo estímulo de una estimulación periódica con período τ para Φ_i la relación recursiva es:

$$\Phi_{i+1} = g(\Phi_i) + \frac{\tau}{T_0} \quad (1)$$

donde $g(\Phi)$ es la respuesta fase y está determinada experimentalmente por esos estímulos y $g(\Phi + j) = g(\Phi) + j$ para cualquier j en el conjunto de los números enteros y T_0 es el período del ciclo límite.

La ecuación (1) mide la contracción de los agregados como función de la fase para la contracción en el tiempo de la perturbación.

Si graficamos la nueva fase siguiendo un estímulo contra la vieja fase, la curva resultante es llamada la curva de transición.

Si ahora iteramos $g(\Phi)$ para calcular la respuesta de los agregados a estimulación periódica. Las respuestas observadas son de período doble y de dinámica caótica cuando la frecuencia del conductor periódico es aumentada.

En resumen, las dinámicas en respuesta a estimulación periódica son predichas iterando la función derivada experimentalmente y lleva cercanamente a lo que se observó experimentalmente.

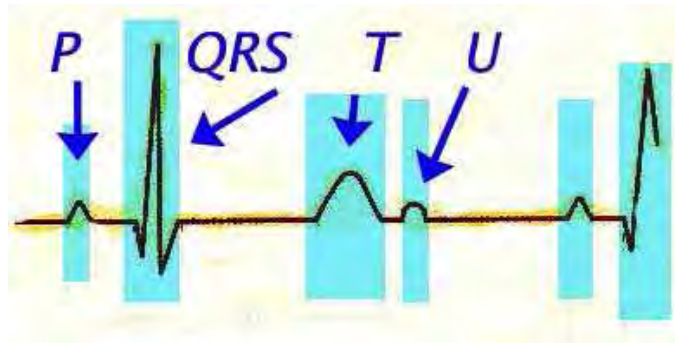
Experimentalmente algunos investigadores observaron patrones similares a muchas arritmias comúnmente observadas, otros investigadores utilizan las propiedades de la respuesta fase para explicar para-sístoles ventriculares, algunos más asocian bloqueos intermitentes o variables con el comportamiento irregular complejo característico de dinámicas caóticas observadas en el modelo de respuesta fase.

Consideremos la actividad eléctrica de un corazón normal donde la diferencia del potencial entre varios puntos de la superficie del cuerpo es llamada electrocardiograma (ECG).



Electrocardiograma

La serie de tiempo del ECG consiste de las ondas **P**, el complejo **QRS**, las ondas **T** y las ondas **U**. Las ondas **P** reflejan la excitación de los atrios, el complejo **QRS** refleja la excitación de los ventrículos (red de His-Purkinjé), las ondas **T** se asocian con la recuperación del estado eléctrico inicial de los ventrículos y las ondas **U** se asocian con la despolarización de fibras de Purkinjé.



En la imagen se muestran las ondas principales que componen un electrocardiograma.

Como hemos visto en el corazón se dan varios tipos de ritmos, que es posible distinguirlos en los electrocardiogramas. Sus irregularidades han sido reconocidas como signos de alguna enfermedad, pero todavía falta analizar desde distintos puntos de vista su dinámica, ya que aún se desconoce el origen de algunos casos de infarto, por lo que todavía no son prevenibles todos los infartos.

Muy importante es la fibrilación, que causa miles de muertes súbitas al año. En muchos casos, estas muertes se deben al bloqueo de las arterias, que causan la falta de alimentación de las células del músculo que bombea la sangre.

En un corazón normal las células se contraen y relajan de manera periódica y coordinada, mientras que cuando hay fibrilación, las células se contorsionan sin coordinación alguna y no pueden bombear sangre. En un corazón normal las señales eléctricas viajan de manera coordinada a lo largo del corazón. Cuando la señal llega, cada célula se contrae, enseguida la célula se relaja durante un intervalo determinado, dentro del cual no puede volver a contraerse. En cambio, cuando hay fibrilación la onda se esparce sin coordinación dando como resultado que el corazón nunca está del todo contraído ni del todo relajado.

Una forma de ayudar a un paciente que está sufriendo un ataque de fibrilación es aplicarle una corriente eléctrica —un “shock eléctrico”— con lo que a menudo su corazón vuelve a trabajar normalmente.

En un corazón en fibrilación, cada una de sus partes puede estar funcionando normalmente, pero de manera descoordinada. Las autopsias de personas que murieron por estas causas muestran que los músculos no están dañados y que sin embargo, el corazón en conjunto no funcionó.

El corazón es un sistema complejo, que ahora se estudia desde el punto de vista del Caos. Se ha encontrado que su actividad eléctrica presenta secuencias de doblamiento de períodos hasta llegar a un comportamiento caótico, similar al de otros sistemas que desarrollan caos. Cuando se presenta fibrilación se está en un régimen caótico, y al dar un “shock eléctrico” los parámetros del corazón se modifican y éste regresa a un régimen que ya no es caótico, por lo que su comportamiento vuelve a ser regular.

La modificación de algún parámetro relacionado con el funcionamiento del corazón, como por ejemplo el cambio en la conductividad en los músculos o en el tiempo de llegada de alguna señal, puede alterar el régimen en que se encuentra el órgano.

El comportamiento caótico de algún sistema biológico no siempre está relacionado con alguna enfermedad. Aunque pueda parecer increíble, se ha empezado a considerar el caos como fuente de salud. Los sistemas no lineales tienen la capacidad de regulación y de control. Si a un sistema que se comporta linealmente se le produce una pequeña perturbación, entonces se comportará de manera cercana a como lo haría si no se le hubiera perturbado. Sin embargo, si se da la misma perturbación a un sistema no lineal, éste tiende a volver a su condición inicial.

Si un sistema llegara siempre a un valor final de sus variables, sin importar el valor de sus parámetros, entonces este sistema no

podría ajustarse a cambios. Sin embargo los seres vivientes deben poder adaptarse a los cambios. Por lo tanto en un sistema como el tratado, si las circunstancias externas hacen que el valor de q se altere, entonces los valores finales que adquirirá la variable x serán distintos de los que tenía antes del cambio. Si el sistema biológico es capaz de vivir con los nuevos valores finales significa que se ha podido adaptar a las nuevas circunstancias. Si no, desaparecerá.

El hecho de que muchos sistemas biológicos sean no lineales y se comporten caóticamente ha permitido la posibilidad de adaptación. Algunos investigadores han sugerido que para que estos sistemas sobrevivan bajo nuevas circunstancias tendrán que desarrollar estructuras fractales. Por ejemplo, las fibras conductoras del corazón o las redes que forman los bronquios tienen estructura fractal que permite una gran variedad de ritmos.

Por lo tanto, se puede llegar a la sorprendente conclusión de que el caos permite la salud, mientras que si un sistema fuera totalmente pronosticable, al ocurrir cualquier cambio se enfermaría y poco después desaparecería.

De estas consideraciones se obtiene una sugerencia muy interesante: cuando una enfermedad se debe a la inadaptabilidad del organismo a los posibles nuevos ritmos debidos al cambio de circunstancias, el tratamiento debería consistir en ampliar sus capacidades para que estos nuevos ritmos fueran capaces de darse. Esta idea puede abrir una nueva forma de tratar ciertas enfermedades.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

[A] Adams J.F. Vector fields on spheres. *Ann. Math.* 75 (1962) p.603-632.

[A-LL] Aceff F., Lluís-Puebla E. *Matemática en la Matemática, Música, Medicina y Aeronáutica*. Pub. Electr. Serie: Divulgación. Vol. 1 (2006)

[A-LL-S-S] Aisbett J, Lluís-Puebla E., Snaith V and Soulé C. On $K^*(\mathbb{Z}/n)$ and $K^*(\mathbb{F}_q[t]/(t^2))$. *Mem. Amer. Math. Soc.* Vol. 57, No. 329 (1985).

[A-H] Atiyah M, Hirzebruch F. Vector bundles and homogeneous spaces. *Proc. of Symp. in Pure Math.* Amer. Math. Soc. 3 (1961) p.7-38.

[A-S] Atiyah M, Singer I. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963) p.422-433.

Atiyah, M. F. How Research is Carried Out. *Bull. IMA.* 10 (1974) p.232-234.

Atiyah, M. F. *Mathematics and the Computer Revolution*. Nuova Civiltà delle Macchine II (No. 3) (1984) p. 27-32 y *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*. Cambridge University Press. (1986) p. 43-51.

Atiyah, M. F. Identifying progress in mathematics. *ESF Conference in Colmar*. Cambridge University Press (1985) p. 24-41.

Atiyah, M. F. *Mathematics in the 20 th. century*. Reimpreso de Doctor Honoris Causa 2001. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Matemáticas. UNAM. (2001).

Barnsley, M. Fractals everywhere. Boston: Academic Press. (1993)

Bassingthwaighte JB, King RB, Roger SA. Fractal nature of regional myocardial blood flow heterogeneity. *Circ Res* 1989; 65(3):578-90.

[B-S] Borel A, Serre J-P. Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France* 86 (1958) p.97-136.

Braun, E. Caos, fractales y cosas raras. Fondo de Cultura Económica.

Canales, M., Olivares, R et al. Caracterización del árbol bronquial en mamíferos. *Rev. Chil. anat.* Vol 16. No.2 p 237-244 (1998)

[D-H] Davis, P.J., Hersh R. *The Mathematical Experience.* Houghton Mifflin Co. Boston. (1981).

Debus, S. Une Foire de courbes sans tangentes. *G.M.E.L. Actualités Mathématiques Gauthier-Villars* p 99-119. (1981)

[D] Dieudonné J. *A Panorama of Pure Mathematics.* Academic Press, (1982).

Field, M. and Golubitsky, M. *Symetry in Chaos: a search for pattern in mathematics, art and nature.* Oxford University Press. (1992)

Kaandorp, J. *Fractal modelling growth and form in Biology.* Springer Verlag. (1994)

[L] Lam T.Y. Serre's conjecture. *Lecture Notes in Mathematics* 635. Springer-Verlag (1978).

[LL1] Lluís-Puebla E. *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica.* Addison Wesley Iberoamericana, (1990).

[LL1a] Lluís-Puebla E. Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica. Segunda Edición. Publicaciones Electrónicas. Sociedad Matemática Mexicana. Serie Textos. Volumen 5. (2005).

[LL2] Lluís-Puebla, E. et al. Higher Algebraic K-Theory: an overview. Lecture Notes in Mathematics 1491. Springer-Verlag. (1992).

[LL3] Lluís-Puebla, E. Álgebra Lineal, Álgebra Multilineal y K-Teoría Algebraica Clásica. SITESA. (1997).

[LL4] Lluís-Puebla, E. Videgrabación de la Conferencia Magistral “Matemática: lo digno de ser aprendido”. Conferencia de clausura del VII Congreso de la Sociedad Boliviana de Matemática. Videoteca de la Sociedad Boliviana de Matemática. Cochabamba, Bolivia. (10/XI/2000).

Lluís-Puebla, E. Mazzola, G. Noll, T. eds. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. Universität Osnabrück. 2004. epOs. ISSN: 3-923486-57-x papel, 3-923486-58-8 CD ROM. <http://dnb.ddb.de> versión electrónica.

Mandelbrot, B. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman. (1983)

Mandelbrot, B. Fractals and Chaos: the Mandelbrot set and beyond. New York: Springer Verlag. (2004)

Meakin, P. A new model for biological pattern formation. Journal Theor. Biology. 118, (1986) p 101-113.

[M] Montiel, M. El Denotador: Su Estructura, Construcción y Papel en la Teoría Matemática de la Música. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. UNAM. 1999.

- [M-B] MacLane S, Birkhoff G. Algebra. Macmillan. (1968).
- [M-M] Mac Lane S, Moerdijk I. Sheaves in Geometry and Logic. Springer (1994).
- [Mazz] Mazzola, G., (contribuyente Lluís-Puebla, E. et al.) The Topos of Music. Birkhäuser Verlag. Basel, Suiza. (2002).
- [M-N-LL] Mazzola, G. Noll, T. Lluís-Puebla, E. Perspectives in Mathematical and Computational Music Theory. epOs. Alemania. (2004).
- Minio R. An interview with Michael Atiyah. The Mathematical Intelligencer. Vol. 6 No. 1 (1984) p. 9-19.
- Peitgen, H., Jürgens, H., and Saupe, D. Chaos and Fractals: new frontiers of science. Springer Verlag. (2004)
- [Q] Quillen D. Higher Algebraic K-Theory. Proc. Int. Con. of Math. Vancouver (1974).
- Richardson, M. and Gillespy, T. Fractal analysis of trabecular bone. Dept. of Radiology of Washington University (2000)
- [S] Serre J.P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61 (1955) p.197-278.
- [Sw] Swan R.J. Vector bundles and projective modules. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) p.264-277.
- [ToM] Mazzola, G. The Topos of Music. Birkhauser. (2002)
- [V] Vaserstein L.N. Vector bundles and projective modules revisited. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986).
- West, J. B. Fractal Physiology and Chaos in medicine. Singapore: World Scientific. (1990)

LOS AUTORES

Flor de María Aceff

Flor de María Aceff nació en la Ciudad de México. Obtuvo el título de Profesora de Educación Primaria en la Escuela Nacional de Maestros en 1982. Después, en 1989, la Licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Posteriormente, en 1990 se graduó como Maestra en Ciencias Matemáticas. Finalmente obtuvo su Doctorado en Matemáticas en 1995, este último con la realización de la tesis “Teoría de Dispersión para la Ecuación de Onda con Perturbaciones de rango corto”.

La Dra. Aceff es Profesora de Tiempo Completo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Realiza actividades de investigación, difusión y docencia tanto en el ámbito de licenciatura como de posgrado. Perteneció al Sistema Nacional de Investigadores y es miembro del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística, de la American Mathematical Society, de la Real Sociedad Matemática Española y de la Sociedad Matemática Mexicana.

Emilio Lluis-Puebla

En Emilio Lluis se conjugan la Ciencia y el Arte paralelamente. Nació en la Ciudad de México en septiembre de 1952. Por un lado, Emilio Lluis realizó sus Estudios Profesionales y de Maestría en Matemática en México. En 1980 obtuvo su Doctorado (Ph.D) en Matemática en Canadá. Es catedrático de la Universidad Nacional

Autónoma de México en sus Divisiones de Estudios Profesionales y de Posgrado desde hace veintinueve años. Ha formado varios profesores e investigadores que laboran tanto en México como en el extranjero.

Es autor de varios libros sobre K-Teoría Algebraica, Álgebra Homológica, Álgebra Lineal y Teoría Matemática de la Música publicados en las editoriales con distribución mundial Addison Wesley, Birkhäuser y Springer Verlag entre otras.

Es miembro de varias asociaciones científicas como la Real Sociedad Matemática Española y la American Mathematical Society. Es presidente de la Academia de Ciencias del Instituto Mexicano de Ciencias y Humanidades, presidente de la Academia de Matemática de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística y presidente 2000-2002 de la Sociedad Matemática Mexicana.

Paralelamente, Emilio Lluís, inició sus estudios pianísticos a los 6 años de edad tras haber mostrado desde pequeño una gran disposición hacia la música. En México estudió con distinguidos pianistas. Durante los años setenta realizó estudios en Canadá con el extraordinario pianista Peter Katin y a lo largo de su carrera participó en diversos cursos pianísticos como los de Jörg Demus y Daniel Ericourt.

Es presidente de la Academia de Música de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística. Frecuentemente ofrece conferencias y cursos de perfeccionamiento pianístico en México y en el extranjero. En los años ochenta presentó el Ciclo Completo de las 32 Sonatas para piano de Beethoven. Es el primer pianista mexicano que interpreta tan majestuosa obra en salas de concierto. La Colección de "Emilio Lluís en CD y DVD" acaba de ser editada y consta de treinta y cuatro CD y treinta y tres DVD.

Sus actuaciones incluyen giras en repetidas ocasiones por Sudamérica y Europa, actuando como recitalista en Canadá,

Dinamarca, Alemania, Suiza, Portugal, República Dominicana, Costa Rica, Perú, Bolivia, Brasil, etc. y como solista de diversas orquestas sinfónicas nacionales así como extranjeras incluyendo la Sinfónica Nacional de La Paz y la Filarmónica de Río de Janeiro interpretando obras como el Concierto Emperador de Beethoven, el Concierto 2 de Brahms y el segundo concierto para piano y orquesta de Rachmaninoff.

Contraportada

Este segundo volumen, al igual que el primero, tiene como propósito el de servir como motivación y orientación vocacional a los jóvenes deseosos de dedicarse a una de las aventuras más formidables del Ser Humano, la Matemática. También está dedicado a toda persona que desee obtener un concepto más aproximado acerca de la Matemática y sus practicantes. Está dirigido tanto para un público en general como para un lector de nivel matemático diverso. Hemos tratado de dejarle algo a cada uno de ellos.

En “Matemática y matemáticos II” se escribe acerca de la Matemática, sus características, la investigación y progreso en ella. Como ejemplo del surgimiento de una teoría matemática se presenta la K-Teoría Algebraica. También, como matemática aplicada se hace lo correspondiente con la Teoría Matemática de la Música. Finalmente, se exponen pensamientos acerca de la Computación y su relación con la Matemática.

Con respecto a “Matemática en la Música II”, actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer un marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Se expone el acercamiento de Mazzola para muchos problemas musicales el cual está basado en la Teoría de Topos. Se introduce el concepto de Denotador el cual permite describir los objetos musicales y se mencionan las ideas detrás del mismo. Se concluye que estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años.

Muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que exhiben varios niveles de complejidad vistos con la geometría usual. La existencia de estos patrones nos reta a estudiar esas formas que con la geometría usual parecen no tener forma, es decir, a investigar la morfología de lo "amorfo". En el capítulo III presentamos los fractales, que son la herramienta para estudiar los patrones complejos de la naturaleza.

Con respecto a “Matemática en Nuestro Cuerpo”, los fractales son estructuras geométricas que se pueden usar para analizar muchas estructuras biológicas que no son compatibles con análisis convencionales. Aquí se exhibe el análisis fractal y se muestra cómo se puede aplicar al análisis del hueso trabecular, a la estructura del árbol bronquial y al análisis de las arritmias cardíacas.