

## CAPÍTULO III

### Matemática en la Naturaleza

En los últimos años, un amplio rango de estructuras complejas de interés para los científicos, ingenieros y médicos ha sido caracterizado cualitativamente usando la idea de una *dimensión fractal*: una dimensión que corresponde de una manera única a la forma geométrica que se estudia, y que con frecuencia no es un entero.

La clave para este progreso es el reconocimiento de que muchas estructuras aleatorias obedecen tanto a una simetría como a un encogimiento dados por estructuras regulares. Esta "simetría a escala" tiene la implicación de que los objetos parecen el mismo en muchas escalas de observación diferentes.

Los no especialistas también están algo familiarizados con los objetos fractales. Todos hemos visto objetos fractales, probablemente en la niñez. Quizá hayamos visto los cristales de la nieve que tienen el mismo patrón, o quizás hayamos observado con detenimiento algunos árboles y hayamos visto que cada rama es similar a todo el árbol. De hecho para "ver" cualquier cosa —fractal o no— requerimos que las células nerviosas en la retina del ojo envíen una señal, y estas células nerviosas de la retina son objetos fractales.

Muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados que exhiben muchos niveles de complejidad vistos con la geometría usual, a la cual de ahora en adelante llamaremos Euclidiana.

La existencia de estos patrones nos reta a estudiar esas formas que con la geometría usual parecen ser sin forma, es decir a investigar la morfología de lo "amorfo".

Respondiendo a este reto Mandelbrot concibió y desarrolló una nueva geometría de la naturaleza e implementó su uso en diversos campos. Esta geometría describe muchos de los patrones irregulares y fragmentados que nos rodean, y nos llevan a nuevas teorías, identificando una familia de formas que les llamó *fractales*. Los fractales más útiles involucran una probabilidad estadística tanto de sus regularidades como irregularidades. También las formas descritas aquí pueden escalarse (es decir, amplificarse o reducirse), implicando que el grado de sus irregularidades y/o fragmentación es el mismo en todas las escalas.

Un fractal es una forma geométrica que es compleja y detallada en estructura en cualquier nivel de amplificación. Con frecuencia los fractales son autosimilares, es decir, tienen la propiedad de que cada porción pequeña del fractal puede verse como una réplica reducida del entero.

El nombre de fractal lo tomó Mandelbrot del adjetivo en latín "*fractus*", que proviene del verbo "*frangere*" que significa romper, crear fragmentos irregulares, por lo que este nombre es apropiado para nuestras necesidades, ya que, además de fragmentar (como en las palabras fracción o refracción) "*fractus*" también significa irregular.

Algunos objetos fractales son curvas o superficies, otros son polvos disconexos, y aún otros son cuerpos de formas horribles que no están en buenos términos ni con las ciencias ni con las artes.

Muchas de estas ilustraciones son de formas que nunca se habían considerado, pero otras representan construcciones conocidas con anterioridad.

Mientras que la geometría fractal se inició en 1975, muchas de sus herramientas y conceptos se habían desarrollado con anterioridad por diversas razones diferentes a las de Mandelbrot.

"Fractal" es una palabra en la cual está subyacente una inmensa clase de objetos, que han jugado un papel histórico en el desarrollo de las matemáticas puras. Una gran revolución de ideas separa a las matemáticas del siglo XIX de las matemáticas modernas del siglo XX. La matemática clásica tiene sus raíces en las estructuras geométricas (de Euclides) regulares y la dinámica continua de Newton. Las matemáticas modernas empiezan con la Teoría de Conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el espacio. Históricamente la revolución fue forzada por el descubrimiento de estructuras que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas estructuras fueron pensadas como "patológicas", como una galería de monstruos, emparentadas con la pintura cubista y la música atonal que fueron las bases para establecer estándares de gusto en las artes al mismo tiempo. Los matemáticos que crearon a esos monstruos son recordados como importantes ya que mostraron al mundo que las matemáticas puras contienen una riqueza de posibilidades que va más allá de las estructuras simples que veían en la naturaleza. Las matemáticas del siglo XX florecieron en la creencia de que habían trascendido completamente las limitaciones impuestas por sus orígenes naturales.

La naturaleza le ha jugado una broma a los matemáticos. Los matemáticos del siglo XIX pudieron haber tenido mucha imaginación, pero la naturaleza tiene más. Las mismas estructuras patológicas que los matemáticos inventaron para romper la pérdida del naturalismo del siglo XIX se convirtieron en objetos familiares alrededor de nosotros. Así, hemos confirmado la observación de Blaise Pascal, que establece que la imaginación es rebasada por la naturaleza.

La geometría fractal no es una aplicación directa de las matemáticas del siglo XX. Es una nueva rama que nació con la

crisis que surgió en 1875 cuando duBois Reymond reportó que Weierstrass había construido una función continua no diferenciable, la crisis duró aproximadamente hasta 1925, teniendo como actores principales a Cantor, Peano, Lebesgue y Hausdorff. Estos nombres al igual que Besicovitch, Bolzano, Cesàro, Koch, Osgood, Sierpinski y Urysohn, no se encuentran en el estudio empírico de la naturaleza, pero el trabajo de estos gigantes ha trascendido.

En 1872 Weierstrass estableció la existencia de curvas continuas sin tangente. Él hizo la función  $y = \sum a^n \cos b^n x$  donde  $0 < a < 1$ ,

$b$  es un entero impar y  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi(1-a)$ . La última condición se

debe a Bromwich. Después de la de Weierstrass, otras funciones continuas sin derivada o cuya derivada existe raramente fueron construidas. Por ejemplo, Hardy quien produjo un análisis profundo de la función de Weierstrass mostró que la función de

Riemann  $\sum \frac{1}{n^2} \text{sen } n^2 \pi x$  no admite derivadas para cada valor irracional de  $x$ .

La conmoción que provocaron las funciones sin derivada llevó a Hermite para escribir esto en su carta del 20 de mayo de 1893 a Stieltjes: “me alejo con miedo y horror de esta plaga miserable de las funciones continuas que no tienen derivadas...” Un pequeño reproche comparado con la reacción de Poincaré acerca de estos asuntos: “Cuando uno inventaba una nueva función, estaba en vista de alguna meta conveniente; ahora se inventan intencionalmente para poner los defectos de los razonamientos de nuestros padres”. Poincaré dice una verdad, pero no dice toda la verdad. Poincaré nos pregunta sobre la utilidad de las funciones derivables en ningún punto. La mejor respuesta a esta pregunta es mirar la naturaleza muy atentamente.

Ahora se sabe que el movimiento browniano es el movimiento de partículas en suspensión observada por Brown en 1827, está limitado íntimamente a la ecuación del calor, a los procesos de difusión y los movimientos desorganizados de gases. Desde el principio del siglo XX, después del famoso artículo de Einstein de

1905, *Annalen der Physik*, se han convencido los físicos de la irregularidad muy grande de trayectorias de partículas pequeñas en el momento de una difusión. Detengámonos a mirar una simulación del movimiento browniano para notar este fenómeno. La simulación se ha reproducido después de **100000** observaciones separadas por  $10^{-5}$  segundos.

En 1933, Paley, Wiener y Zygmund les dieron razón completamente a estos físicos: sobre la trayectoria de un movimiento browniano,  $B(t)$ , no es derivable en cada uno de sus puntos. Después de esto, Lévy expuso la geometría irregular de las trayectorias de un movimiento browniano en la recta o el plano. De nuevo hoy el estudio local de movimiento browniano es un objeto de estudio.

En las décadas que siguieron el descubrimiento de Weierstrass, algunas curvas notables se han imaginado. Lo que estas tienen en común, es que desafían la intuición y no admiten una tangente para la mayoría de sus puntos. Así es cómo Peano (1890) se propuso llenar el interior de un cuadrado por el trazado de sólo una curva continua, fue toda una sorpresa. Hilbert (1891), Sierpinski (1912) lograron el objetivo de Peano. Después de la paradoja de Peano, Osgood tuvo éxito al crear una curva simple continua del plano cuya medida plana es positiva. Sierpinski tenía una imaginación fecunda y concibió dos curvas; una es una curva en la que todos sus puntos son de ramificación, la otra es capaz de aceptar la imagen homeomorfa de cualquier parte compacta del plano cuyo interior sea vacío. Si estas dos curvas son un tipo inusual, todas las otras curvas de las que nosotros discutiremos serán algunas curvas paramétricas continuas.

Presentamos ahora un modelo de construcción de una curva sin tangentes. Primero describiremos lo que es una transformación elemental de Koch. Sean  $L_0$  una línea poligonal formada por  $m + 1$  puntos del plano  $P_0, P_1, \dots, P_m$ , un entero  $d$  y  $T_1, T_2, \dots, T_d$  transformaciones lineales, que tienen la propiedad que su suma da el operador-identidad  $I$ . Construyamos entonces la línea poligonal

$L_1$  formada de  $md + 1$  vértices  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{md}$  donde  $Q_{id+j} = P_i + S_j(P_{i+1} - P_i)$ ,  $0 \leq i < m$ ,  $0 \leq j \leq d$  considerando que  $S_0 = \mathbf{0}$ ,  $S_j = \sum_{k=1}^j T_k$ . Todos los vértices de  $L_0$  son vértices de  $L_1$  y cada uno de lados de  $L_0$  ha sido reemplazado por  $d$  lados.

Uno puede repetir la transformación elemental de Koch con  $d$  y los mismos operadores lineales  $T_i$  para conseguir  $L_2$  a partir de la línea  $L_1$  y después para conseguir  $L_3, L_4$ , etc. Cuando  $k$  aumenta, los vértices de  $L_k$  están en expansión. Produzcamos la parametrización de la porción de la curva que se extiende de  $P_r$  a  $P_{r+1}$ .  $(x(t), y(t)) = P_r + S_i(V) + S_j(T_{i+1}(V)) + S_k(T_{j+1}(T_{i+1}(V))) + \dots$  donde  $t$  es un número real y  $V = P_{r+1} - P_r$ .

Diremos que hemos construido una curva de Koch de grado  $d$ . En general, tiene esta propiedad notable de no admitir una tangente en todos sus vértices. Veamos que este modelo incluye varias construcciones conocidas. La curva que Peano propuso, en 1890, se inicia con la diagonal del cuadrado unitario,  $L_0 = (0,0), (1,1)$  y con la ayuda de 9 operadores lineales:  $I/3, R/3, I/3, -R/3, -I/3, -R/3, I/3, R/3$  e  $I/3$  donde  $R$  es la rotación de 90 grados e  $I$  es la identidad. Está curva es de grado 9.

Por otro lado, Koch en 1904 propuso una construcción geométrica que se forma con 4 operadores lineales que dependen de un parámetro  $u$ ,  $1/4 < u < 1$ . Estos operadores son:  $K_1^u = uI$ ,

$$K_2^u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - u & \sqrt{u - \frac{1}{4}} \\ -\sqrt{u - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - u \end{pmatrix}, \quad K_3^u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - u & -\sqrt{u - \frac{1}{4}} \\ \sqrt{u - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - u \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$K_4^u = uI$ . La curva de Koch parte de  $L_0$ , el segmento de recta que une a  $(0,0)$  con  $(1,0)$ , y se obtienen sucesivamente las transformaciones elementales de Koch con la ayuda de los

operadores lineales  $K_1^u$ ,  $K_2^u$ ,  $K_3^u$  y  $K_4^u$ . Si  $1/4 < u < 1/2$ , la curva límite es una curva simple que no tiene tangentes.

Si  $L_0$  está formado por los tres lados de un triángulo equilátero orientado negativamente y si uno guarda el valor  $u = \frac{1}{3}$ , la curva final es una curva simple cerrada con la apariencia de un copo de nieve. Si  $L_0$  es el segmento unitario del eje de abscisas y si  $u = \frac{1}{2}$ , la curva de Koch es entonces una curva continua que llena el triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es precisamente  $L_0$ .

Uno puede modificar la construcción de Koch para conseguir una curva de Osgood que es muy explícito.  $L_0$  es un segmento unitario

del eje de abscisas. Uno obtiene  $u_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ . Por recurrencia

sobre  $n$ , se construye la línea poligonal  $L_n$  por medio de una transformación elemental de Koch a partir de  $L_{n-1}$  y de los cuatro operadores lineales  $k_1^{u_n}$ ,  $k_2^{u_n}$ ,  $k_3^{u_n}$  y  $k_4^{u_n}$ . La curva-límite es una

curva simple cuya área es  $\frac{1}{4} \left( \prod_{n=1}^{\infty} 2u_n \right)^2 = 0.083\dots$ . En la

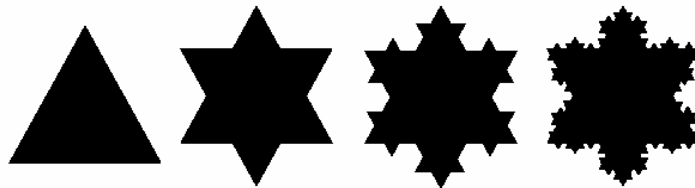
literatura, uno encuentra pocos ejemplos explícitos de curvas de Osgood. Uno de estos ejemplos se debe a Schreiber en 1968. Algunos que los ejemplos menos explícitos son proporcionados por Gelbaum y Olmsted.

¿El tema de curvas sin tangentes es una pura fantasía matemática? Yo diría que no, porque las curvas sin tangentes se presentan espontáneamente en ciertas investigaciones. A esta consideración, Poincaré fue precursor en el estudio de los grupos de Klein y allí observó la presencia de curvas sin tangentes, esto en 1884. De la misma manera, Fatou y Julia en sus trabajos sobre la iteración de funciones racionales establecieron que los dominios invariantes del plano complejo para una función racional admiten en la mayoría de casos una frontera salvaje.

Después de algunas décadas, las curvas sin tangentes forman parte de un grupo más grande de objetos, objetos fractales donde la dimensión fraccionaria de Hausdorff se entiende entre uno y dos en el plano y entre uno y tres en el espacio. Científicos de disciplinas variadas llevaron su atención en las aplicaciones potenciales de los objetos fractales, para la textura de materiales, para la estructura de materia, para la forma de proteínas o litorales, para la geometría de turbulencias, en el estudio del pulmón, en el análisis de ruidos o imágenes, en medidas en geografía o al microscopio,...

Además la geometría fractal revela que algunos de los capítulos más austeros de la matemática tienen una cara escondida: un mundo de belleza plástica insospechada hasta ahora.

Los conjuntos fractales se definen de una manera rigurosa (como todo en matemáticas), pero la expresión "*fractal natural*" designará un patrón natural que usualmente representaremos con un conjunto fractal. Por ejemplo, las curvas Brownianas son conjuntos fractales, y el movimiento browniano (en física) es un fractal natural.

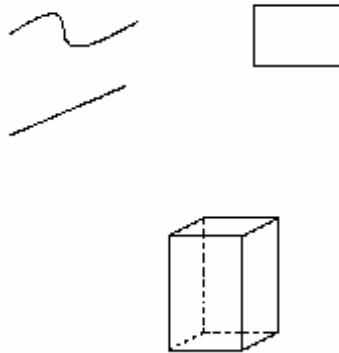


Construcción del copo de nieve

Un ejemplo de un fractal es el copo de nieve construido tomando un triángulo equilátero y erigiendo triángulos equiláteros más pequeños en el tercio de en medio de los lados de manera progresiva. Teóricamente, el resultado debe ser una figura de área

finita pero con perímetro de longitud infinita, el cual consiste de un número infinito de vértices. En términos matemáticos, esta curva (el perímetro de la figura) no puede ser diferenciable en cualquiera de sus puntos. Es decir, de manera intuitiva que la curva no es suave.

En geometría utilizamos la palabra *dimensión* para decir cuántos parámetros necesitamos para medir un objeto. Así, para medir una curva, sólo necesitamos un parámetro, que es la longitud; para medir un área necesitamos dos parámetros (largo y ancho, o radio y ángulo); para medir un volumen necesitamos tres parámetros (largo, ancho y alto).

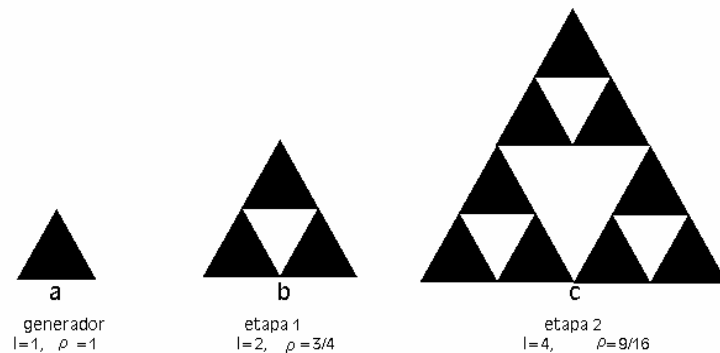


Una curva tiene dimensión euclidiana 1, mientras que una superficie y un cuerpo con volumen tienen dimensión euclidiana 2 y 3 respectivamente.

Mandelbrot adoptó una definición más abstracta de dimensión que la usada en geometría Euclidiana, diciendo que la dimensión de un fractal debe usarse como un exponente cuando se mide su tamaño. El resultado es que un fractal no puede considerarse que tiene dimensión uno, dos o cualquier otro número entero, sino un número fraccionario. El fractal de la curva del copo de nieve tiene una dimensión de 1.2618. El concepto de dimensión fractal juega un papel importante en las investigaciones sobre fractales.

La geometría fractal no es sólo un desarrollo abstracto. La línea costera, si se mide hasta su más pequeña irregularidad, podría tender a una longitud infinita al igual que el copo de nieve. Mandelbrot ha sugerido que montañas, nubes, agregados, conglomerados de galaxias y otros fenómenos naturales son también fractales en la naturaleza, y la aplicación de la geometría fractal en las ciencias se ha vuelto un campo de investigación en expansión. Además la belleza de los fractales los ha convertido en un elemento clave en las gráficas por computadora. Los fractales también han sido utilizados para comprimir imágenes en computadora tanto fijas como de video. En 1987 Michael F. Barnsley descubrió la transformada fractal la cual detecta automáticamente códigos fractales de imágenes del mundo real (fotografías digitalizadas). Este descubrimiento es el que llevó a la compresión de imágenes fractales, usadas en gran variedad de aplicaciones de multimedia y otras aplicaciones basadas en imágenes de computadora.

Los fractales pueden ser de dos categorías, aleatorios y no aleatorios. Los fractales en Física son aleatorios, pero es instructivo primero entender algunos ejemplos de fractales no aleatorios que han sido muy estudiados.



Construcción del triángulo de Sierpinski.

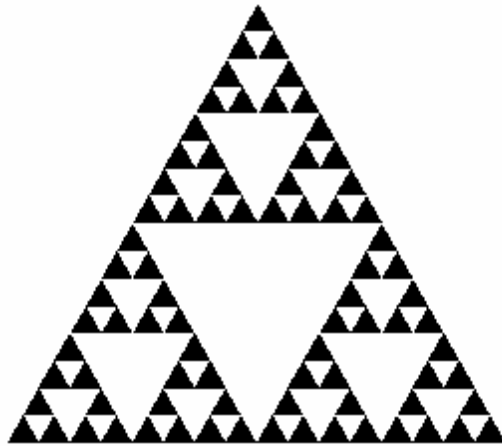
Empezaremos con el triángulo de Sierpinski. Simplemente iteraremos (repetiremos) una *regla de crecimiento*, al igual que un niño puede armar un castillo con bloques. Nuestra unidad básica es una figura triangular como la de la figura 1, la cual tomaremos como unidad de masa  $M = 1$  y longitud de los lados  $L = 1$ .

El triángulo de Sierpinski está definido operacionalmente como un "proceso de agregación" obtenido por un sencillo proceso iterativo. En la etapa uno, unimos bloques para crear la figura 1b la cual es de masa  $M = 3$  y la longitud de los lados es  $L = 2$ . El efecto de la etapa uno es producir una unidad con densidad menor. Si definimos la densidad como

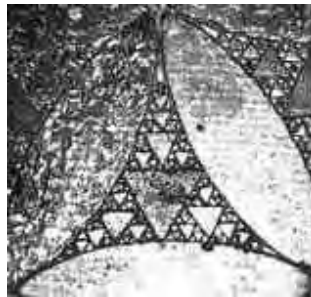
$$d(L) = \frac{M(L)}{L^2} \quad (1)$$

entonces la densidad disminuye de 1 a  $3/4$  como resultado de la etapa uno. Ahora simplemente iteramos - es decir, repetimos esta regla una y otra vez ad infinitum. Así en la etapa dos ponemos juntos tres de las estructuras de densidad  $3/4$  construidas en la etapa uno, por lo que hemos construido un objeto con densidad  $d(3/4)^2$ . En la etapa 3, unimos tres objetos construidos en la etapa dos. Continuamos así hasta que se acaben los bloques (si es físico) o hasta que la estructura sea infinita (si es matemático).

El resultado de la etapa cuatro —con 81 bloques negros y  $27+36+48+64$  bloques blancos— puede verse en los mosaicos del piso de la iglesia en Anagni, Italia, la cual fue construida en el año 1104. Aunque a este fractal le dio nombre en el siglo XX el matemático polaco Sierpinski, fue conocido ocho siglos antes por todo aquel que iba a la iglesia de esa localidad.



Etapa 4 de la construcción del triángulo de Sierpinski, esta figura puede verse en el piso de la iglesia de Anagni.

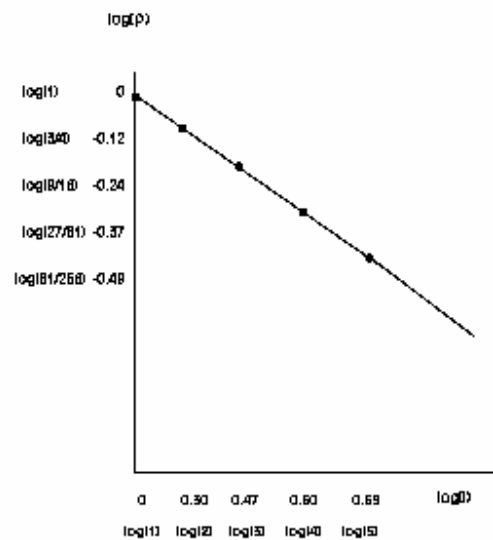


Fotografía del piso de la iglesia de Anagni.

Los habitantes de Anagni no tenían papel logarítmico para graficar en el siglo XII. Si ellos hubieran tenido tal invento, entonces podrían haber graficado la dependencia de  $d$  en  $L$ . Podrían haber encontrado que:

- decrece monótonamente con  $L$ , sin límite, así que iterando el número suficiente de veces podemos obtener un objeto de densidad tan pequeña como lo deseemos, y

- decrece respecto a  $L$  de una manera predecible, decrece como una función de potencias.



Gráfica de  $\log L$  contra  $\log M(L)$

Las funciones de potencias tienen la forma genérica  $y = Ax^b$  y, como tal tiene dos parámetros, la amplitud  $A$  y el exponente  $b$ . La amplitud no es de interés intrínseco, porque depende de la elección que hayamos hecho de las definiciones de  $M$  y  $L$ . El exponente, por otro lado depende del proceso mismo, —es decir, de la regla que hemos seguido para iterar—. Diferentes reglas nos llevan a diferentes exponentes. En este ejemplo,  $d(L) = L^b$ , así que la amplitud es unitaria. El exponente está dado por la pendiente de la recta de la gráfica anterior,

$$\begin{aligned}
b &= \textit{pendiente} \\
&= \frac{(\log 1 - \log(3/4))}{\log 1 - \log 2} \\
&= \frac{\log 3}{\log 2} + 2
\end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente estamos listos para definir la dimensión fractal  $d_f$ , por medio de la ecuación

$$M(L) = AL^{d_f} \tag{3}$$

Si sustituimos (3) en (1), obtenemos

$$d(L) = AL^{d_f - 2} \tag{4}$$

comparando (2) y (4), concluimos que el triángulo de Sierpinski es un objeto fractal con dimensión

$$d_f = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58 \tag{5}$$

En la geometría clásica (Euclidiana) las formas regulares tienen una dimensión al igual que los espacios donde las incluimos. Por ejemplo: una línea tiene  $d = 1$  y un cuadrado  $d = 2$ . Diremos que el triángulo de Sierpinski tiene una dimensión intermedia entre las dimensiones de una línea y de un área —una dimensión "fraccionaria" —de ahí el término *fractal*.

Los sistemas reales en la naturaleza no se ensamblan como el piso de la iglesia de Anagni, de hecho, los fractales no aleatorios no se encuentran en la naturaleza. La naturaleza exhibe numerosos ejemplos de objetos que no son fractales, pero si hacemos un promedio estadístico de alguna propiedad tal como la densidad, encontramos una cantidad que disminuye linealmente con la longitud de la escala cuando graficamos en un papel logarítmico. A tales objetos los denominamos *fractales aleatorios*, para distinguirlos de los fractales geométricos no aleatorios como el ejemplo de la anterior.

Los métodos probabilísticos y estadísticos constituyen una base sólida para el análisis de los sistemas naturales, sin embargo estos métodos no sirven para caracterizar el patrón de heterogeneidad de un sistema natural. La geometría fractal promete ser la herramienta necesaria para resolver este problema además de proporcionar información acerca de los procesos que originaron la heterogeneidad de un sistema dado.

Otra ventaja del uso de los parámetros fractales para la descripción de la heterogeneidad de los sistemas naturales, consiste en la posibilidad de describir no sólo las propiedades geométricas estáticas de las estructuras fractales, sino también sus propiedades dinámicas y sus interacciones con el medio exterior.

Para terminar, a continuación presentamos algunos conjuntos y sus dimensiones fractal  $D$  y topológica  $D_T$ .

Conjunto	$D$	$D_T$
Un punto	0	0
Un número finito de puntos	0	0
Un conjunto numerable	0	0
Una línea recta	1	1
Un círculo	1	1
Una curva regular	1	1
Un disco en el plano	2	2
Una superficie regular	2	2
Curva de Peano	2	2
Escalera del diablo de Cantor	1	1
Conjunto Ternario de Cantor	$\log_2/\log_3$	0
Curva de Koch (copo de nieve)	$\log_4/\log_3$	1
Triángulo de Sierpinski	$\log_3/\log_2$	1
Membranas pulmonares	2.90	2

Como nos imaginábamos, los primeros ocho conjuntos de la lista no son fractales. Para nuestra sorpresa la curva de Peano y la escalera del diablo de Cantor no son fractales y los últimos ejemplos sí son fractales.

