Una Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas en el Sentido de Itô

Jorge A. León
Departamento de Matemáticas
Cinvestav-IPN
A. P. 14-740
07000 México, D.F.

Resumen

En este artículo se presentan algunas ideas básicas que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas gobernadas por el movimiento Browniano (también llamado proceso de Wiener).

Dr. Jorge A. León Vázquez

Obtuvo su Doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemáticas en el CINVESTAV en el año de 1989. Actualmente es profesor del Departamento de Matemáticas de la misma institución. Su área de interés es el Cálculo Estocástico.

1. Introducción

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales (ED) en general representan la evolución de un fenómeno natural en el tiempo. El tratamiento matemático de estas ecuaciones requiere que todos los parámetros involucrados sean completamente conocidos (por ejemplo, condiciones iniciales, coeficientes, factores externos que influyen en el sistema, etc.). Sin embargo, en la práctica las ED contienen elementos que son difíciles de conocer ya sea porque son experimentalmente obtenidos por la poca información que se tiene o debido a algún "ruido" interno o externo del sistema (que puede ser aleatorio). Así, es necesario hacer una "corrección aleatoria" de la ecuación, *i.e.* introducir un parámetro en un conjunto donde esta definida una probabilidad y cuyos elementos representan los posibles factores que influyen en el sistema, para la solución de las posibles realizaciones del fenómeno en cuestión. La manera más simple de incorporar esta corrección es permitir que los coeficientes sean aleatorios y perturbar la ED aditivamente por medio de un "ruido aleatorio". Es claro que la modelación de estas correcciones es un reto difícil e interesante (véase [10]). En la literatura, la perturbación aleatoria ha sido representada por el "ruido blanco Gaussiano" $\mathcal{N}$ (véase, Arnold [1] y Hida [11]), especialmente porque éste aproxima el efecto de la superposición de un número grande de pequeñas perturbaciones aleatorias independientes en tiempos distintos. El movimiento Browniano o proceso de Wiener W es un proceso estocástico cuya derivada (en el sentido generalizado) es $\mathcal{N}$. De esto, es razonable interpretar a la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$\frac{dX_t}{dt} = f(t, X_t) + g(t, X_t)\mathcal{N}_t, \qquad t \in [0,T],$$

como

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s, \qquad t \in [0,T]. \quad (1)$$

Aquí

$$\int_0^t g(s, X_s)dW_s, \qquad t \in [0,T], \quad (2)$$

es una integral estocástica de un proceso estocástico con respecto al movimiento Browniano W. La dificultad para definir esta integral es que Paley, Wiener y Zygmund [18] demostraron que W tiene trayectorias (véase Sección 2) que no son diferenciables en cada punto y en particular no son de variación acotada. Para un estudio profundo de las trayectorias de W ver Lévy [15, 16].

El primero en observar el movimiento Browniano fue el botánico Robert Brown [5] al estudiar el movimiento de granos de polen en agua.

La formulación matemática del movimiento Browniano fue iniciada por Bachelier [2] y en el campo de la física por Einstein [9], y el tratamiento matemático riguroso fue empezado por Wiener [21].

Itô [12] definió las integrales estocásticas de la forma (2) y Doob [7] observó que éstas deberían estudiarse en el contexto de la teoría de martingalas (véase Sección 2).

Note que sería más correcto llamar ecuación integral estocástica a (1), pero desde que Bernstein [3] la llamó EDE se ha continuado con esta costumbre.

Las ED son un caso particular de las EDE y estas últimas constituyen hoy en día un tema bastante desarrollado de los procesos estocásticos con aplicaciones importantes (véase, por ejemplo, Protter [19]).

2. Preliminares

En la teoría de probabilidad siempre se tiene un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Aquí, Ω es un conjunto no vacío y sus elementos representan los resultados posibles de un experimento aleatorio. $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, es decir es una familia de subconjuntos de Ω (llamados *eventos*) cerrada bajo uniones numerables y complementos. Los eventos representan las propiedades que queremos considerar. P es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$ (*i.e.*, $P(\Omega) = 1$) que indica que tan probable es que ocurra un evento en relación a otro.

Si estamos observando un fenómeno aleatorio que evoluciona en el tiempo, es necesario incluir en nuestro espacio de probabilidad una familia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ no decreciente de σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$ tal que para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ incluya todos los eventos que pueden ocurrir hasta t (inclusive). A una tal familia se le llama *filtración*.

Sea $\mathcal{B}(R)$ la σ-álgebra de Borel de R. Una función $X : \Omega \to R$ es una *variable aleatoria* si X es una función $\mathcal{F}$-medible (i.e., $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para $B \in \mathcal{B}(R)$).

Un *proceso estocástico* es una familia $X = \{X_t : t \geq 0\}$ de variables aleatorias. También podemos ver a un proceso como una colección de funciones $X(w) : R_+ \to R$, $w \in \Omega$. Estas funciones se llaman las *trayectorias* de X.

En lo que sigue diremos que un proceso X *es medible* si $X : \Omega \times R \to R$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(R)$-medible y que éste *es adaptado* a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$. La filtración más pequeña a la cual X es adaptado es $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ con $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ (i.e., $\mathcal{F}_t^X$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\{X_s^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(R), 0 \leq s \leq t\}$). Note que $\mathcal{F}_t^X$ es la familia de eventos que dependen solo del comportamiento de X hasta el tiempo t. A $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ se le llama la *filtración generada por X*.

El *valor esperado o la esperanza* de una variable aleatoria X es $E(X) := \int_\Omega X dP$ (si existe).

Una de las herramientas fundamentales de la teoría de probabilidad es el concepto de martingala. Para ver la importancia de las martingalas recomendamos leer Bojdecki [4]. Sea $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración de $\mathcal{F}$ y X un proceso adaptado a esta filtración. Se dice que X *es una martingala* (ó $\mathcal{F}_t$*-martingala*) si para cada $s \leq t$ y $A \in \mathcal{F}_s$,

$$E|X_t| < \infty \qquad \text{y} \qquad E(X_t 1_A) = E(X_s 1_A)$$

Para no complicar más la exposición, sobre el movimiento Browniano W solo mencionaré que éste es una $\mathcal{F}_t^W$-martingala con trayectorias continuas tal que $W_0 = 0$ y $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ es una martingala.

3. Integración estocástica

En esta sección daremos sólo una idea de la construcción de la integral estocástica con respecto al movimiento Browniano. Para una exposición detallada véase Arnold [1] y Karatzas, Shreve [14].

Sea $T > 0$. En lo que sigue suponemos que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad donde está definido un movimiento Browniano W y que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ es la filtración generada por W (véase Sección 2).

Sea g un proceso estocástico con trayectorias continuas. En un primer intento, podríamos definir la integral estocástica

$$\int_0^T g_s dW_s \tag{3}$$

trayectoria por trayectoria como una integral de Lebesgue-Stieltjes. Esto es, para cada $w \in \Omega$, podríamos definir a (3) como el límite de las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})$$

con $0 \leq s_0 < s_1 < \ldots < s_n = T$, $t_i = (1 - \alpha)s_{i-1} + \alpha s_i$, y $0 \leq \alpha \leq 1$. Sin embargo el conjunto de elementos de Ω para los cuales S_n converge (cuando $\max(s_i - s_{i-1}) \to 0$) depende de la medida P. Por lo tanto es natural definir a la integral (3) como el límite de S_n en probabilidad (*i.e.*, el límite en medida con respecto a P). Desafortunadamente se presentan los dos siguientes problemas:

- El límite en probabilidad de S_n puede depender del punto α (ver [1]).
- Si para $\alpha = 0$ se tiene que el límite en probabilidad de S_n existe para cada proceso g con trayectorias continuas, entonces W tiene trayectorias de variación acotada (ver [19]), lo que es imposible (véase Sección 1).

El problema que se tiene en el último punto es que si g es un proceso, entonces para cada $t \geq 0$, g_t es $\mathcal{F}$-medible. Es decir, g_t puede depender de eventos que ocurren después del instante t.

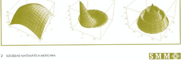
Ahora damos la idea que Itô uso para definir (3).

Si $\mathcal{F}_t$ representa la información que tenemos hasta el tiempo t, es natural suponer que g_t en (3) es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible. Esto es, g es un proceso adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

Como se hace en la teoría de integración, primero definiremos (3) en el caso que g sea un proceso simple adaptado de la forma

$$g_s = \sum_{i=0}^{n} g_{t_i} 1_{[t_i, t_{i+1})}(s) \tag{4}$$

$0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq T$. Note que como g *es* adaptado, entonces g_{t_i} es una variable $\mathcal{F}_{t_i}$-medible.



La integral estocástica de un proceso simple adaptado de la forma (4) se define como la variable aleatoria ($\mathcal{F}$-medible)

$$\int_0^T g_s\,dW_s = \sum_{k=0}^{n} g_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \qquad (5)$$

Observe que esta definición es independiente de la representación de g ya que es dada trayectoria por trayectoria. Además si $\int_0^T E(g_s)^2 ds < \infty$, se tiene que (5) implica

$$E(\int_0^T g_s dW_s)^2 = \sum_{k=0}^{n} E(g_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}))^2$$
$$+ 2\sum_{j<k} E(g_{t_j} g_{t_k}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) \qquad (6)$$
$$= \int_0^T E(g_s)^2 ds, \qquad (7)$$

donde usamos que W es una martingala para ver que (6) es cero y que $\{W_t^2 - t : t \in [0, T]\}$ es una martingala para demostrar que $E(g_{t_k}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}))^2 = (E(g_{t_k})^2)(t_{k+1} - t_k)$, $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Una consecuencia importante de (7) es que si g es como en (4) (y no necesariamente satisface que $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$). Entonces para N, $c > 0$, se tiene

$$P[|\int_0^T g_s dW_s| > c] \le N/c^2 + P[\int_0^T (g_s)^2 ds > N], \qquad (8)$$

donde $[|\int_0^T g_s dW_s| > c] = \{\omega \in \Omega : |(\int_0^T g_s dW_s)(\omega)| > c\}$.

El siguiente paso para construir la integral estocástica (3) es ver que los procesos simples adaptados aproximan a los procesos medibles y adaptados en algún sentido.

Es conocido que si g es un proceso medible y adaptado tal que

$$\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty \text{ con probabilidad 1 (i.e., } P\text{-c.s.}), \qquad (9)$$

entonces existe una sucesión $\{g^{(n)} : n \ge 1\}$ de procesos simples adaptados tal que

$$\int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds \to 0 \text{ en probabilidad cuando } n \to \infty. \qquad (10)$$

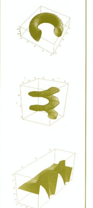
Esto es, para cada $c > 0$, $P[\int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds > c] \to 0$ cuando $n \to \infty$. Note que (8) y (10) implican que la sucesión $\{\int_0^T g_s^{(n)} dW_s : n \ge 1\}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria $I(g)$ ($\mathcal{F}$-medible). Así es natural definir la integral estocástica $\int_0^T g_s dW_s$ donde g satisface (9), como $I(g)$. Es fácil ver que $\int_0^T g_s dW_s$ solo depende de g y no de la sucesión $\{g^{(n)} : n \ge 1\}$.

Ahora resumiremos algunas de las propiedades de la integral estocástica (3). Sean g, $g^{(1)}$ y $g^{(2)}$ procesos estocásticos medibles y adaptados como en (9) y $\{h^{(n)} : n \ge 1\}$ una sucesión de procesos simples adaptados y acotados. Entonces se tiene que las siguientes propiedades son válidas:

i) $\int_0^T (a g_s^{(1)} + b g_s^{(2)}) dW_s = a\int_0^T g_s^{(1)} dW_s + b\int_0^T g_s^{(2)} W_s$, $a, b \in \mathbb{R}$.
ii) El proceso $\{\int_0^t g_s dW_s : t \in [0, T]\}$, con $\int_0^t g_s dW_s := \int_0^T 1_{[0,t]}(s) g_s dW_s$, tiene trayectorias continuas.
iii) Si h es un proceso simple adaptado y acotado tal que $\sup_{s,\omega}|h_s^{(n)} - h_s| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces (8) implica que $\int_0^T h_s^{(n)} dW_s \to \int_0^T h_s dW_s$ en probabilidad cuando $n \to \infty$.

Además si $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$, se tiene también lo siguiente:

iv) $E(\int_0^T g_s dW_s) = 0$ y $E(\int_0^T g_s dW_s)^2 = E\int_0^T (g_s)^2 ds$



v) El proceso $\{\int_0^t g_s dW_s : t \in [0, T]\}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala.

Note que $\int_0^T dW_s$ merece el nombre de integral ya que es un operador lineal (véase (i)) y satisface el teorema de convergencia dominada iii).

La Propiedad iii) ha caracterizado a la familia de "buenos integradores". En efecto, suponga que Z es un proceso con trayectorias continuas a la derecha con límites a la izquierda adaptado a una filtración $(G_t)_{t\in[0,T]}$ y que g es un proceso simple como en (4) adaptado a la filtración $(G_t)_{t\in[0,T]}$. Definimos (véase (5))

$$\mathcal{J}_t^Z(g) = \sum_{i=1}^{n} g_{t_i}(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})$$

Se ha demostrado que la condición mínima para definir una integral estocástica de procesos adaptados a $(G_t)_{t\in[0,T]}$ con respecto a Z (usando las ideas de Itô) es una versión de iii). A saber:

vi) Sean g, $g^{(n)}$, $n \geq 1$, procesos simples adaptados a la filtración $(G_t)_{t\in[0,T]}$. Entonces

$$\sup_{(t,w)} |g_t^{(n)} - g_t| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

implica

$$\mathcal{J}_t^Z(g^{(n)}) \to \mathcal{J}_t^Z(g) \quad \text{en probabilidad.}$$

Se ha comprobado que si Z es un "buen integrador" (*i.e.*, cumple (vi)), entonces Z *es* la suma de una "martingala" con respecto a $(G_t)_{t\in[0,T]}$ y un proceso con trayectorias de variación acotada. A un tal proceso Z *se* le llama *Gt-semimartingala*. El lector interesado en este enfoque puede consultar [19].

Para terminar con esta sección enunciamos el resultado más importante de la teoría de integración estocástica. Éste es una fórmula de integración por partes para la integral estocástica. Para extensiones de este resultado ver [17] y sus referencias.

Fórmula de Itô. *Sea $f \in C^2$ (i.e., una función real con segunda derivada continua) y sea*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \int_0^t g_s\,dW_s, \qquad t \in [0,T],$$

donde X_0 es $\mathcal{F}_0$-medible, b es un proceso medible y adaptado con trayectorias integrables y g es un proceso medible y adaptado que cumple (9). Entonces

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,dX_s\,dX_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)(b_s\,ds + g_s\,dW_s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)(g_s)^2\,ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Note que $dXdX$ se calcula usando la tabla de multiplicación

$\times$	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

(12)

Una consecuencia importante de la fórmula de Itô es que $\{f(X_t) : t \in [0, T]\}$ es una $\mathcal{F}_t$-semimartingala. En la siguiente sección mencionaremos otras aplicaciones importantes de la fórmula de Itô (11).

Dos ingredientes esenciales en la demostración de la fórmula de Itô son la fórmula de Taylor y el hecho de que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}\right)^2 \to (t-s) \tag{13}$$

en probabilidad cuando $n \to \infty$ si $s = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = t$ es una sucesión de particiones del intervalo $[s, t]$ tal que $\max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Note que (13) justifica la tabla (12).

4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Recordemos que W es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ es la filtración generada por W. En lo que sigue b, $\sigma : [0, T] \times R \to R$ son dos funciones $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{B}(R)$-medibles y ξ es una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible tal que $E|\xi|^2 < \infty$.

Consideremos la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \\ X_0 &= \xi. \end{aligned} \tag{14}$$

Una solución *(fuerte)* de la EDE (14) es un proceso X adaptado (a $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$) con trayectorias continuas tal que:

- $P[X_0 = \xi] = 1$,
- $P[\int_0^T (|b(s, X_s)| + (\sigma(s, X_s))^2)ds < \infty] = 1$,
- $X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dW_s$ con probabilidad 1 para cada $t \in [0, T]$.

Algunas soluciones de EDE se pueden obtener por medio de la fórmula de Itô. Por ejemplo, $Y_t = \exp(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_s)^2 ds)$ es solución de la EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma_t X_t dW_t, \quad t \in [0, T], \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

La fórmula de Itô también ha permitido relacionar a las EDE con las ecuaciones diferenciales ordinarias [8] y con las ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico y elíptico [14].

Ahora estudiamos el resultado clásico de existencia y unicidad de soluciones de una EDE con coeficientes de Lipschitz que tienen crecimiento lineal. El lector interesado en resultados más generales puede ver [14] y [19].

En lo sucesivo suponemos que b y σ satisfacen las siguientes hipótesis:

(H1) *Condición de Lipschitz:* Existe una constante K tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|, \quad x, y \in R, \; t \in [0, T].$$

(H2) *Crecimiento lineal:* Existe una constante K tal que

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad x \in R, \quad t \in [0, T]$$

Es claro que la igualdad (3) sigue siendo válida, así que el nuevo conjunto, denotémoslo por $\mathbf{H}(\mathbf{C})$, es un álgebra compleja, asociativa y no-conmutativa. A los elementos de $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ los llamamos cuaternios complejos o bien *bicuaternios*.

Sea q un cuaternio o un bicuaternio, luego la definición (2) admite la siguiente representación:

$$q = \mathrm{Sc}(q) + \mathrm{Vec}(q); \tag{5}$$

donde $\mathrm{Sc}(q) := q_0$ es la parte escalar del cuaternio (o bicuaternio) q y $\mathrm{Vec}(q) := q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ es la parte vectorial de q. A veces denotaremos $\mathrm{Vec}(q) =: \vec{q}$.

Recordemos ahora las definiciones clásicas del cálculo vectorial para los productos escalar y vectorial. La igualdad (3) se reescribe en la forma

$$p \cdot q = p_0 q_0 - \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}] + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} \tag{6}$$

donde $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$ es el producto escalar y $[\vec{p}, \vec{q}]$ es el producto vectorial. En particular, para $p_0 = q_0 = 0$ (6) se convierte en

$$p \cdot q = -\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + [\vec{p}, \vec{q}] \tag{7}$$

es decir, el producto escalar y el producto vectorial de dos vectores son fragmentos de su producto cuaterniónico, poseyendo el último mejores propiedades algebraicas que las de los otros dos productos. La igualdad (7) permite conseguir inmediatamente las propiedades vectoriales partiendo de sus antecedentes cuaterniónicos. El lector puede familiarizarse con este enfoque, por ejemplo, en los libros de [Kr Sh] o [Gu Sp].

Los cuaternios tienen otra representación útil. En efecto, si escribimos:

$$\begin{aligned} q &= q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} \\ &= (q_0 + q_1\mathbf{i}) + (q_2 + q_3\mathbf{i})\mathbf{j} \\ &=: z_1 + z_2\mathbf{j}, \end{aligned} \tag{8}$$

donde z_1, z_2 son dos números complejos usuales con unidad imaginaria i (no confundir con $\mathbf{H}(\mathbf{C})$), y entonces $\mathbf{H} \cong \mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ lo cual permite, entre otras cosas, convertir a $\mathbf{C}^2$ en un álgebra compleja.

Los cuaternios se pueden pensar como matrices usuales, sin ningún exotismo de múltiples unidades imaginarias, por lo que, tanto $\mathbf{H}$ como $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ son isomorfos respectivamente al conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

con entradas complejas o reales, respectivamente. Vale la pena mencionar que aunque existe un isomorfismo formal, en la práctica se requiere mucho más esfuerzo al trabajar con las matrices del tipo (9) que con los cuaternios de (2); el lector está invitado a evaluar la cantidad de operaciones necesarias para multiplicar dos cuaternios de acuerdo a la regla de (3) y para multiplicar dos matrices del tipo (9).

Una de las más notables características de los números complejos es la conjugación compleja. Sea $z = x + iy \in \mathbf{C}$, entonces su conjugado y su módulo están dados por:

$$\bar{z} := x - iy, \tag{10}$$

$$|z|^2 := z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2,$$

respectivamente, relacionando así la estructura *geométrica* (euclidiana) en $\mathbf{R}^2$ con su estructura algebraica, la de los complejos. Resulta que se tiene un análogo exacto con los cuaterniones. Para cada $q \in \mathbf{H}$ se define su conjugado cuaterniónico como

$$\bar{q} := q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k} = q_0 - \vec{q}. \tag{11}$$

y se cumplen las propiedades

$$\bar{\bar{q}} = q; \quad \overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}; \quad \overline{pq} = \bar{q}\bar{p},$$

y en particular

$$q\bar{q} = \bar{q}q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2, \tag{12}$$

donde $|q|$ es la distancia euclidiana en $\mathbf{R}^4$, como sucede en el caso complejo (10). La identidad (12) tiene la misma interpretación, es decir nos da una relación entre la estructura geométrica (euclidiana) de $\mathbf{R}^4$ con su estructura algebraica, la dotada por los cuaternios.

La fórmula (12) nos lleva de inmediato a una conclusión importante, a saber, que para todo $q \neq 0$, $q \in \mathbf{H}$, existe su inverso multiplicativo dado por

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \tag{13}$$

La definición (11) se extiende a los bicuaternios, pero ahora

$$q \cdot \bar{q} \neq |q|^2_{\mathbf{R}^8}$$

no es el cuadrado de la distancia euclidiana en $\mathbf{R}^8$ y entonces el conjunto $\mathbf{H}(\mathbf{C})$ tiene divisores de cero. Para un $q \in \mathbf{H}(\mathbf{C})$, el cual no sea divisor de cero, la fórmula (13) sigue determinando un inverso multiplicativo.

De esta manera se ve que $\mathbf{H}$ es un campo, aunque no-conmutativo, que refleja la geometría de $\mathbf{R}^4$, y que por lo tanto sus elementos merecen llamarse números. Los bicuaternios, aunque no siempre son divisibles, no obstante sirven muy bien a muchos objetivos naturales que surgen en la construcción del análisis matemático para funciones de valores bicuaterniónicos. El lector interesado puede encontrar mucha información detallada en los libros mencionados antes [Kr Sh], [Gu Sp], pero también en muchas otras fuentes.

Sea ahora Ω un dominio de $\mathbf{H} \cong \mathbf{R}^4$ y $f : \Omega \to \mathbf{H}$ una función. A primera vista, parece natural introducir la derivada de f en el punto $q \in \Omega$ de igual manera que en el caso real o complejo, o sea como el límite de uno de los dos cocientes (que según se ve, sería erróneo llamar cocientes diferenciales)

$$(q - q_0)^{-1} \cdot (f(q) - f(q_0)), \qquad (f(q) - f(q_0)) \cdot (q - q_0)^{-1}$$

al tomar en cuenta la no-conmutatividad. Sin embargo, paradójicamente esta posible definición de derivada nos lleva a clases casi triviales: las únicas funciones cuaterniónicas para las cuales los límites de los cocientes anteriores existen son de la forma $f(q) = qa + b$, o bien $f(q) = aq + b$, con a, b dos cuaternios. Esta es una consecuencia del hecho de que el incremento $q - q_0$, por ser unidimensional, ya no es consistente con la situación de los conjuntos de dimensión cuatro.

La noción de la derivada cuaterniónica en base a los incrementos generalizados (¡tridimensionales!) ha sido introducida e investigada en el artículo de I. Mitelman y M. Shapiro [Mi Sh] (compárese con [Su]), donde también el concepto de la derivada direccional tridimensional ha sido introducido, y cuya definición está íntimamente ligada a la derivada cuaterniónica, igual que en el caso del análisis complejo de una variable. Tomando en cuenta la importancia de la noción en cuestión, dicho artículo puede servir como un buen punto de partida para otra investigación sobre ella.

Históricamente, la idea de diferenciabilidad cuaterniónica se ha estado desarrollando en base a las generalizaciones de las condiciones de Cauchy-Riemann de una variable compleja. Precisando, si $f = u + iv$ es una función con valores complejos su analiticidad es equivalente al siguiente hecho:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

O bien, en puros términos complejos se satisface la relación

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0, \tag{14}$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{15}$$

es el *operador de Cauchy-Riemann* (a veces se le llama la derivada formal o el operador de Wirtinger). El correspondiente operador conjugado es

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{16}$$

y juntos factorizan al operador de Laplace en $\mathbf{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z} := \frac{1}{4}\Delta_{\mathbf{R}^2}. \tag{17}$$

Es esta la relación fundamental que muestra la íntima relación entre las funciones analíticas y las armónicas de $\mathbf{R}^2$.

Sea ahora $f : \Omega \subset \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ una función cuaterniónica, los análogos de los operadores (16) y (17) son:

$$D := \frac{\partial}{\partial x_0} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{18}$$
$$\bar D := \frac{\partial}{\partial x_0} - \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

con la propiedad

$$D \circ \bar D = \bar D \circ D = \Delta_{R^4} = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{19}$$

la cual se debe comparar con las relaciones (17) y (12). Una generalización de la ecuación (14) sería

$$\bar D[f] = 0 \tag{20}$$

en un dominio $\Omega \subset \mathbf{H}^1$. A una función f con la propiedad (20) se le llama hiperholomorfa, o regular, monógena, etc. Resulta que el conjunto $\mathcal{M}(\Omega)$ de las funciones hiperholomorfas en Ω tiene una profunda analogía estructural con el conjunto de las funciones analíticas de una variable compleja, a diferencia de la teoría convencional de las funciones analíticas de varias variables complejas.

La fórmula (8) de representar a los cuaternios también permite representar al operador $\bar D$, de la fórmula (18), en términos complejos; una vez realizada esta representación se ve explícitamente que las funciones analíticas de dos variables complejas forman un subconjunto propio de la clase $\mathcal{M}(\Omega)$, luego cualquier proposición válida para las funciones cuaterniónicas hiperholomorfas tiene una reinterpretación o una reformulación para la teoría clásica de dos variables complejas.

Ahora bien, según el famoso teorema de Frobenius, en $\mathbf{R}^3$ no existe ningún conjunto de "números buenos", de tal forma que el conjunto $\mathbf{H}$ permanece como el rango de funciones cuyo dominio está en $\mathbf{R}^3$, por supuesto pensando en la línea de ideas descritas anteriormente. Considérese ahora una función $f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ y el siguiente operador de Cauchy-Riemann

$$D_3 := \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{21}$$

o sea, el operador ∇ de Hamilton, aunque visto de forma cuaterniónica, entonces

$$\bar D_3 f = \bar D_3[f_0 + \vec f\,] = \operatorname{grad} f_0 - \operatorname{div}\vec f + \operatorname{rot}\vec f. \tag{22}$$

La última fórmula (22) dice que el cálculo cuaterniónico nos permite reunir todos los tres operadores diferenciales básicos del análisis vectorial en un sólo objeto con excelentes propiedades algebraicas, las cuales se pierden al ser considerados por separado. También las reglas cuaterniónicas dicen que

$$\bar D_3^2 = \bar D_3 \circ \bar D_3 = -\Delta_{\mathbf{R}^3} \tag{23}$$

revelando una vez más la relación entre las funciones hiperholomorfas en $\mathbf{R}^3$, es decir, las funciones del conjunto $\mathcal{M}_3 := \{f : \bar D_3 f = 0\}$ y las funciones armónicas de $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Sea ahora $\vec f : \Omega \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \subset \mathbf{H}$ un campo vectorial que es simultáneamente solenoidal e irrotacional, es decir:

$$\operatorname{div}\vec f = 0, \quad \operatorname{rot}\vec f = 0. \tag{24}$$

Por la ecuación (21) concluimos de inmediato que $\vec f$ pertenece al conjunto $\mathcal{M}_3(\Omega)$. Al igual que en el caso de $\mathbf{R}^4$, la teoría para $\mathcal{M}_3(\Omega)$ tiene profundas analogías con la teoría de funciones de una variable compleja, lo cual sugiere, en muchas ocasiones, las conjeturas verosímiles de probarse y los caminos o métodos para hacerlo, mientras que en el análisis vectorial se carece de esta analogía.

Esta nota será continuada por una segunda (por aparecer en el siguiente número), que nos ilustra sobre los avances recientes del Análisis Hipercomplejo, particularmente en nuestro país.

Referencias

[Gu Sp] K. Gurlebeck, W. Sprossig, *Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers*. Mathematical methods in practice. John Wiley and Sons, 1997.

[Sh] M. Shapiro, *Some remarks on generalizations of the one-dimensional complex analysis: hypercomplex approach*. Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations , p. 379-401, 1995.

[Kr Sh] V. Kravchenko, M. Shapiro, *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Series Pitman Research Notes in Math., Vol. 351, Addison-Wesley-Longman (Great Britain), 1996.

[Mi Sh] I. Mitelman, M. Shapiro, *Differentiation of the Martinelli-Bochner integrals and the notion of the hyperderivability*. Mathematische Nachrichten, Vol. 172, p.211-238, 1995.

[Su] A. Sudbery, *Quaternionic Analysis*, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., Vol. 85, p. 199-225, 1979.

La condición (H1) garantiza que la EDE (14) tiene a lo más una solución en $L^2(\Omega \times [0,T])$ (*i.e.*, cuadrado integrable). En efecto, sean X, Y dos soluciones de (14) en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Entonces, por (H1) y la Propiedad iv) (Sección 3), tenemos

$$E|X_t - Y_t|^2 \le 4(T+1)K^2 \int_0^t E|X_s - Y_s|^2\, ds, \qquad t \in [0,T].$$

Por lo tanto el Lema de Gronwall implica que $X = Y$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$.

La Hipótesis (H1) en el resultado de unicidad de soluciones de EDE puede debilitarse; en vez de (H1) basta con pedir la siguiente (véase [14]):

(H1') *Condición de Lipschitz local*: Para cada $N > 0$, existe una constante $K_N > 0$ tal que

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K_N|x-y|,\ t \in [0,T],\ |x|, |y| \le N.$$

Es bien sabido que si no se cumple (H1'), entonces la EDE puede tener más de una solución: sea $\alpha \in (0,1)$ entonces la ecuación

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha ds$$

tiene las soluciones $X_t = \beta^{-\beta}(t-s)^\beta 1_{(s,T)}(t)$, donde $\beta = (1-\alpha)^{-1}$ y $0 \le s < T$.

Por otro lado, las Hipótesis (H1) y (H2) implican que la EDE (14) tiene una solución en $L^2(\Omega \times [0,T])$. En efecto, imitando el caso determinista (*i.e.*, $\sigma = 0$ y ξ independiente de Ω), definimos inductivamente

$$X^{(0)} = \xi$$

y

$$X_t^{(n+1)} = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})\, dW_s, \qquad t \in [0,T].$$

Es fácil ver que la Propiedad iv), (H1) y (H2) dan que $\{X^{(n)} : n \ge 0\}$ es una sucesión en $L^2(\Omega \times [0,T])$ tal que

$$E|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \le 4(T+1)K^2 \int_0^t E|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2\, ds, \qquad t \in [0,T].$$

Esta desigualdad permite demostrar que $\{X^{(n)} : n \ge 0\}$ es una sucesión convergente en $L^2(\Omega \times [0,T])$ cuyo límite es una solución de la EDE (14).

Si omitimos la Hipótesis (H2) en el resultado de existencia de soluciones, la EDE (14) puede no tener una solución global (*i.e.*, definida en todo el intervalo $[0,T]$): la solución de la ecuación

$$X_t = 1 + \int_0^t (X_s)^2 ds$$

es $X_t = (1-t)^{-1}$ la cual "explota" cuando $t \to 1$.

Observe que la condición la cual prescribe que los procesos integrables en el sentido de Itô deben ser adaptados, aunque natural, es restrictiva. Por ejemplo, supongamos que la condición inicial ξ de la EDE (14) es $\mathcal{F}_T$-medible (*i.e.*, depende de toda la información que tenemos). En *este caso*, una solución de (14) no puede ser un proceso adaptado.

En los últimos años se han definido varias extensiones de la integral de Itô (véase, por ejemplo, [6], [13] y [20]). Éstas permiten integrar procesos no necesariamente adaptados pero el precio que se paga, entre otros, es que las Propiedades iv) y v) de la integral de Itô ya no se cumplen, por lo que el análisis de la existencia y unicidad de soluciones de una EDE con integrandos no adaptados es más complicado que el método presentado aquí.

Agradecimientos

Doy las gracias a mis colegas Luis G. Gorostiza y Alin Carsteanu por sus comentarios y al M. en C. José Luis Enríquez por la lectura cuidadosa de este manuscrito.

Referencias

[1] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Wiley, 1974.
[2] L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17, 21-86, 1900.
[3] S. Bernstein. *Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques*. Trudy Fiz.-Mat., Steklov Inst., Akad. Nauk. 5, 95-124, 1934.
[4] T. Bojdecki. *¿Qué es y para qué sirve una martingala?* Ciencia 36, 59-65, 1985.
[5] R. Brown. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. Philos. Mag. Ann. of Philos. New Ser. 4, 161-173, 1828.
[6] R. Buckdahn. *Anticipative Girsanov Transformations and Skorohod Stochastic Differential Equations*. Memoirs of the AMS 533, 1994.
[7] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. John Wiley, 1953.
[8] H. Doss. *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires*. Ann. Inst. H. Poincaré, Section B 13, 99-125, 1977.
[9] A. Einstein. *On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat*. Ann. Physik 17, 1905.
[10] L. G. Gorostiza. *Análisis de sistemas sometidos a perturbaciones estocásticas*. Ciencia 35, 33-43, 1984.
[11] T. Hida. *Brownian Motion*. Springer-Verlag, 1980.
[12] K. Itô. *Differential equations determining Markov processes*. Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai 1077, 1352-1400, 1942. (En japonés).
[13] K. Itô. *Extension of stochastic integrals*. Proc. of Intern. Symp. SDE Kyoto, 95-109, 1976.
[14] I. Karatzas y S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer 1991.
[15] P. Levy. *Sur certains processus stochastiques homogènes*. Compositio Math. 7, 283-339, 1939.
[16] P. Lévy. *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, 1948.
[17] S. Moret y D. Nualart. *Generalization of Itô's formula for smooth nondegenerate martingales*. Stochastic Process. Appl. 91, 115-149, 2001.
[18] R. E. A. C. Paley, N. Wiener y A. Zygmund. *Note on random functions*. Math. Z. 37, 647-668, 1933.
[19] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*. Springer-Verlag, 1990.
[20] F. Russo y P. Vallois. *Forward, backward and symmetric stochastic integration*. Probab. Theory Relat. Fields 97, 403-421, 1993.
[21] N. Wiener. *Differential space*. J. Math. Phys. 2, 131-174, 1923.

Una Motivación al Análisis Hipercomplejo

L. F. Reséndis O. y M. Shapiro
Dpto. de Ciencias Básicas UAM-Azc.
Depto. de Matemáticas, ESFM-IPN

Resumen. En esta nota deseamos dar una motivación sencilla, pero profunda del estudio del Análisis Hipercomplejo. Ciertamente hay diversos puntos de vista con los cuales se puede motivar el estudio del Análisis Hipercomplejo, o de cada una de las ramas de la matemática, y esta nota solo representa una síntesis de una larga experiencia de trabajo en esta área, por lo tanto no está exenta de la parcialidad que inevitablemente aparece cuando se intenta un esfuerzo de esta naturaleza.

Los conjuntos **R** y **C** de los números reales y complejos respectivamente, son con toda seguridad, los objetos matemáticos más conocidos. La riqueza de las propiedades que tienen ambos conjuntos llevaron a la creación y al desarrollo de las teorías de funciones de variable real, $f : \Omega \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, y de variable compleja, o sea $f : \Omega \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, cuya utilidad y profundidad está fuera de discusión. Las propiedades de las funciones reales, tanto las particulares e individuales, como las colectivas y grupales, están muy íntimamente relacionadas con las estructuras algebraicas, geométricas, topológicas, etc. subyacentes de los conjuntos unidimensionales y reflejan las interrelaciones entre estos conjuntos. Para las funciones complejas tenemos de igual manera, que sus propiedades son la reflexión de las estructuras similares de los conjuntos bidimensionales y también son la expresión de las interrelaciones entre estos conjuntos.

Es sumamente común considerar a los números reales y a los números complejos como los campos escalares principales, más aún los únicos posibles, en el caso del estudio de las situaciones multidimensionales, esto es en el estudio de los conjuntos de dimensión mayor o igual que 2.

Existen muchas razones matemáticas, históricas, psicológicas para que esto sea así; sin entrar en detalles y sin querer polemizar, se nota que no es tan obvio, por lo menos para los autores. Aún más, los números complejos constituyen una herramienta inapreciable para estudiar y resolver la absoluta mayoría de los problemas en el plano, pero sin embargo no son los mejores números en el estudio de las propiedades de los conjuntos cuya dimensión sea, por ejemplo, 3 o 11, o bien 118.

Los autores son de la opinión de que los problemas multidimensionales requieren de incluir tanto a los números reales y complejos, como a los números de otra naturaleza, con tal de que reflejen mejor las peculiaridades algebraicas, geométricas, topológicas, etc. de las estructuras de los conjuntos que surjan en los problemas relacionados, y que además sirvan como dominios y rangos para las funciones correspondientes.

En realidad tales números, llamados a veces hipercomplejos, son bien conocidos en las matemáticas desde hace mucho tiempo, pero su estudio se ha enfocado más hacia sus propiedades algebraicas, que a los aspectos concernientes al análisis matemático, es decir, al estudio de las funciones hipercomplejas. El estudio de las funciones hipercomplejas tuvo un desarrollo limitado hasta hace poco tiempo, y aunque durante los últimos 25 años se obtuvieron resultados impresionantes, tanto en el marco propio del análisis de funciones hipercomplejas, como en el de numerosas aplicaciones a una amplia gama de áreas de las matemáticas convencionales, esta rama del análisis aun no logra un reconocimiento adecuado.

El sistema hipercomplejo más famoso, e históricamente el primero en ser propuesto, es el conjunto de los cuaternios, propuesto por W.R. Hamilton. Considérense tres diferentes unidades imaginarias i, j, k con las siguientes reglas de multiplicación:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \tag{1}$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k};\ \ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i};\ \ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Luego un *cuaternio* q es una combinación lineal real de estas unidades imaginarias y de la unidad usual, es decir

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}; \tag{2}$$

donde los coeficientes q_0, q_1, q_2, q_3 son números reales. Por lo tanto, dados dos cuaternios p, q se define el producto $p \cdot q$ en base a las reglas (1). Así

$$\begin{aligned} p \cdot q = (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})\,(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\ + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} \\ + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} \\ + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{3}$$

En honor a Hamilton el conjunto de los cuaternios se le denota por **H** y este conjunto es por sí solo un álgebra real, asociativa y no-conmutativa, luego a nivel algebraico el conjunto **H** es profundamente similar al conjunto de los números complejos (lo cual se justifica en detalle posteriormente) y con mucha razón los cuaternios pueden considerarse y llamarse *números cuadridimensionales*.

La definición (2) admite otro tipo de coeficientes, pensemos que ahora se trata de números complejos, pero es de suma importancia tener en cuenta que la unidad imaginaria compleja i es distinta de todas las unidades imaginarias cuaterniónicas, más aún, se cumple

$$i \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot i;\ \ i \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot i;\ \ i \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot i. \tag{4}$$

Formación de Doctores en Matemáticas*

MATEMÁTICAS

L. F. Reséndis O.

El 29 de junio de este año, Raquel R. López Martínez obtuvo su grado de Doctor en Matemáticas por parte del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV-IPN. Este evento fue motivo de celebración no sólo por el nuevo doctor, sino de forma particular para su director de tesis, el Dr. Onésimo Hernández-Lerma, porque se trata de la décima tesis doctoral que ha supervisado. En la comunidad matemática internacional, haber dirigido 10 tesis doctorales es un hecho considerable, pero no fuera de lo común; sin embargo, en México es la primera vez que ocurre.

Ante un hecho tan singular e importante para la comunidad científica de nuestro país, lo primero que se nos ocurre preguntar es: ¿Se tratan de buenas tesis de doctorado?

De entrada, nos responde el Dr. Hernández-Lerma, debemos tratar de definir qué vamos a entender por una buena tesis doctoral. Al respecto, continúa, hay dos criterios aceptados internacionalmente en la comunidad matemática: el primero es que la tesis sea evaluada y aprobada por un cierto número de especialistas en el tema y el segundo es que la tesis dé origen a uno o más artículos cuya publicación sea aceptada en revistas de carácter internacional (*e.g.* las que aparecen en el *Science Citation Index*) que conlleven un arbitraje estricto.

Con respecto al primer criterio, señala el Dr. Hernández-Lerma, en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV tenemos una regla que, sin ser infalible, me parece bastante confiable: la tesis doctoral de cualquier estudiante del Departamento se envía para su evaluación a expertos en el tema relativo a la tesis. Estos expertos son *externos al departamento*, y pueden ser nacionales y/o extranjeros. El número de estos evaluadores no está fijo, pero usualmente es entre 5 y 10. Además, como es natural, la tesis debe ser aprobada por los sinodales (al menos cinco) que integrarán el comité del examen de grado. Así pues, el hecho de que una tesis doctoral pase por todos estos "filtros" —sobre todo por la aprobación de los evaluadores *externos*, que generalmente son especialistas reconocidos internacionalmente— asegura que las tesis doctorales presentadas en nuestro Departamento de Matemáticas sean razonablemente buenas, digamos comparables a las realizadas en una universidad de prestigio de Europa o Estados Unidos.

En relación con el segundo criterio, nos menciona el Dr. Hernández-Lerma, *él sigue* una regla en la formación de sus estudiantes que suele dar muy buenos resultados, pues cada uno de ellos debe empezar a publicar su trabajo de investigación *antes* de iniciar la elaboración de su tesis. En promedio, sus estudiantes de doctorado envían para su publicación tres artículos, todos en revistas internacionales. Esto, desde la óptica del Dr. Hernández-Lerma, no es con el fin de fastidiar a sus estudiantes, sino todo lo contrario. Él considera que hacer investigación —empezando por buscar y resol-

***NOTA DEL EDITOR:**

El Dr. Onésimo Hernández-Lerma es Investigador CINVESTAV 3F (Profesor Titular, categoría máxima) del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV.

Cursó la licenciatura en ESFM-IPN, 1971, obtuvo la maestría (M.Sc.), 1976 y el Doctorado (Ph.D), 1978 en la Universidad de Brown.

Ha publicado 79 artículos de investigación y publicado 11 libros y monografías.

Ex-alumnos de Doctorado del Dr. Onésimo Hernández-Lerma

Rolando Cavazos Cadena
Roberto Acosta Abreu
Daniel Hernández Hernández
Raúl Montes de Oca
Fernando Luque Vásquez
Oscar Vega Amaya
Juan González Hernández
César E. Villarreal Rodríguez
J. Rigoberto Gabriel Argüelles K.
Raquel R. López Martínez

ver *problemas "interesantes"*— es una parte integral, muy importante, en la formación de un doctor, aunque nos aclara, no es la única.

También es necesario para el estudiante aprender a presentar sus resultados y a escribir artículos. Qué mejor momento, de que lo hagan cuando aún son estudiantes, pues tienen la ventaja de ser supervisados (no sólo en el contenido matemático sino ¡hasta la redacción en inglés!) por alguien con experiencia en esta delicada tarea.

Escribir y enviar a publicación dos o tres artículos antes de doctorarse tiene varias ventajas, nos dice el Dr. Hernández-Lerma. Por ejemplo, la más inmediata es sin duda la elaboración casi automática de una tesis doctoral. Además, el hecho de que un estudiante tenga artículos publicados, o al menos aceptados, incrementa sus posibilidades de conseguir un empleo, de ingresar al SNI, etc.

Pero sobre todo esto, lo más importante y que verdaderamente no tiene precio —nos comenta sonriendo el Prof. Hernández-Lerma— es ver el gesto de satisfacción del estudiante cuando le aceptan su primer artículo. Son estos momentos los que recompensan ampliamente, los que hacen que valga la pena dedicarse a formar investigadores.

Además de los 10 doctores que ha formado el Dr. Hernández-Lerma, y cuyos nombres aparecen más adelante, también ha supervisado a 22 estudiantes de maestría. Actualmente dirige a 2 estudiantes de doctorado y 3 de maestría.

El Prof. Hernández-Lerma nos pide mencionar que, con respecto a la elaboración de artículos por parte de estudiantes, vale la pena mencionar que el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV publica la revista estudiantil ***Morfismos***, que tiene entre sus principales objetivos publicar artículos de estudiantes, mexicanos o extranjeros, para favorecer, entre otras cosas, el que adquieran destreza y experiencia en la escritura de resultados matemáticos.

Al despedirnos, deseamos al Dr. Hernández-Lerma un amplio éxito con sus actuales estudiantes y una larga carrera en la formación de investigadores en matemáticas.

El Comité de Publicaciones Electrónicas

de la Sociedad Matemática Mexicana

INVITA

a usted a publicar en esta modalidad TEXTOS, MEMORIAS Y CURSOS

La Sociedad Matemática Mexicana desea proporcionar una Biblioteca a toda la comunidad matemática de México, Hispanoamérica, etc.
En ella encontrará libre acceso a Textos, Memorias y Cursos

Para mayor información, lineamientos, etc., visite el espacio de Publicaciones Electrónicas de la **SMM** en **www.smm.org.mx**.

Además la **SMM** tiene el gusto de informar que nuestro primer texto en Publicación Electrónica es:

Lógica didáctica

que corresponde al nivel de Licenciatura y el autor es **Gonzalo Zubieta**.
De esta manera la **SMM** reconoce la trayectoria profesional y personal del maestro Zubieta.

Problema 1

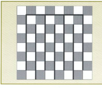
¿Se puede poner el plano proyectivo como unión de dos conjuntos cerrados y conexos encajables en el plano?

Problema 2

¿Cuál es el máximo número de caballos de ajedrez se pueden poner en un tablero de 5 por 5 de tal manera que ninguno de ellos pueda saltar a la posición de otro?

Soluciones a los anteriores

1. La respuesta es que se puede quitar cualquier casilla negra y cualquier blanca y el resto se puede cubrir con 32 fichas de dominó. Para probar esto, observe la figura siguiente.



Imagine usted que corta esta figura por las líneas gruesas. Lo que obtiene es una especie de collar en el que se alternan los cuadrados blancos con los negros. Si usted quita una casilla blanca y una negra (cualesquiera), le van a quedar una o dos tiras donde se alternan los cuadrados blancos y los negros y donde cada tira tiene un cuadrado negro y uno blanco en el extremo. Cada una de esas tiras puede ser cubierta, en forma exacta, por fichas de dominó, por lo que el tablero puede ser cubierto por 32 fichas de dominó, no importa cual par de fichas fue removido (una blanca y una negra, por supuesto).

2. La respuesta es que sí se puede encontrar una familia no numerable de subconjuntos de los naturales tal que la intersección de cada dos de sus miembros es finita. Para construirla, podemos pensar en los racionales en lugar de los naturales. Para cada número irracional x consideremos una sucesión de racionales diferentes $A(x)$ que converge a x. Se puede ver fácilmente que la familia $\{A(x): x \text{ es irracional}\}$ tiene las propiedades requeridas.