

## CAPÍTULO II

### Matemática en la Música II\*

Actualmente es perceptible que en las últimas dos décadas del siglo pasado (y hasta la fecha) hubo una gran tendencia en la Matemática de realizar no sólo aplicaciones sino hacer Matemática en una gran variedad de campos del conocimiento, y el campo de la Música no ha sido la excepción, aunque ya se daba esto en la Música desde la época de Pitágoras. Después, en la Edad Media, la Música estaba agrupada con la Aritmética, la Geometría y la Astronomía en el Cuadrivio. La Música no se consideraba un arte en el sentido moderno sino una ciencia aliada con la Matemática y la Física (la Acústica).

Es bastante desconocida la aplicación de conceptos matemáticos a la Musicología y en particular la Teoría Matemática de la Música. A continuación veamos cómo algunos matemáticos y músicos han aplicado conceptos matemáticos en la Música y cómo se hace matemática nueva con estos conceptos.

Veamos un poco acerca de lo que es la Musicología y su estado pasado y presente. Musicología es el nombre adoptado del francés "musicologie" para referirse al estudio escolástico de la Música. Del alemán "musikwissenschaft" que significa "ciencia de la Música". Hacer musicología no es fácil. La Musicología carece de un marco conceptual estable. Se dice que es muy difícil comenzar a hacer musicología y navegar sobre un marco conceptual seguro. En la musicología tradicional existe el problema estándar del

---

\*Una versión posterior aumentada a ésta apareció bajo el título "Matemática en la Musicología". Pro-Mathematica. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú. Volumen XVII. Número 33. (2003).

encapsulamiento. Se da un postulado encapsulado y se previene de cualquier acceso a la (presunta) complejidad escondida. En la Matemática, el acceso a la complejidad es posible y su realización eventualmente da penetración en el concepto mientras que en el encapsulamiento musicológico los intentos apuntan al vacío, generalmente mediante el rompimiento del flujo de la información mediante un oscuro camino que pretende ser racional, ornamentado con metáforas, transformando un posible concepto profundo en un concepto misterioso, es decir, transformando ciencia en fábula. En uno de los libros de musicología tradicional más ambiciosos, los discursos de las partes importantes se basan en un listado casi infinito de referencias externas.

Afortunadamente, el cubo topográfico ofrece una herramienta compleja que puede proporcionar profundidad del tipo del que se cuenta en la Matemática. Por lo tanto, la Musicología debe de tener ante todo, libre acceso a la complejidad encapsulada: no es posible cultivar regiones del conocimiento privado e inaccesible.

Uno de los propósitos de la Teoría Matemática de la Música es la de establecer dicho marco conceptual estable, definiendo los conceptos en una forma precisa. Sin embargo, no trataremos con la realidad completa de la Música, tal y como aparece en los contextos psicológicos, fisiológicos, sociales, religiosos o políticos. Veamos a continuación las actividades fundamentales relacionadas con la Música y luego su fundamento en campos científicos de investigación establecidos.

La Música tradicionalmente descansa en una conexión fuerte entre facticidad artística y reflexión intelectual. En muchas ciencias y aún artes, tal entrelazamiento es un aspecto exótico, pero la musicología tiene que tratar con ambas haciéndola un caso muy especial. Las cuatro actividades relacionadas con la Música son: producción, recepción, documentación y comunicación. Las podemos visualizar en una figura de tetraedro y por supuesto, no es la única clasificación posible, pero son suficientemente grandes para mostrar la inmensa variedad de perspectivas cuando tratamos

con la Música. Cada actividad tiene una importancia de por sí pero es cuando están juntas que son las necesarias para comprender el fenómeno musical.

Los dominios fundamentales científicos requeridos para relacionar las actividades descritas incluyen la Semiótica, la Física, la Matemática y la Psicología. Definiremos provisionalmente a la Música como un sistema de signos, compuestos de formas complejas, que pueden ser representados por sonidos físicos y que de esta manera median entre contenidos mentales y psíquicos. Así, se recurre a la Semiótica. Para describir estas formas la Matemática es el lenguaje adecuado. Para representar estas formas en el nivel físico, la Física es indispensable y para entender el contenido psíquico, la Psicología es la ciencia requerida. De ninguna forma se pretende crear un esquema reduccionista de la realidad musical, sino que se busca ubicar a la Musicología en el mismo lugar que ocupa cualquier área de investigación, sea de las Ciencias Naturales o de las Humanidades, y acabar con el aura de misticismo y la fuerte recurrencia a la subjetividad que, en lo tocante a nuestro tema, se invocan con frecuencia. Tenemos una representación mediante el tetraedro imaginario anterior para visualizar en forma sinóptica la situación general donde puede contestarse la pregunta: ¿de qué se trata la Música?

Es fundamental enfatizar que, mientras quien emplee métodos matemáticos, lógicos o computacionales en la Música no tiene que ser docto en la Filosofía de la Música, sí es necesario que tenga una orientación dentro de la compleja ontología de este arte. Tanto en la Música como en otras áreas del conocimiento se ha atestiguado cómo la precisión de la Matemática, más un conocimiento deficiente acerca de la ontología del área de aplicación, provoca un dogmatismo; injustamente, se le suele responsabilizar a la Matemática por este problema, y no cuestionar la falta de capacidad de hacer nexos de quien la aplica.

La Teoría Matemática de la Música ofrece un modelo ontológico con un carácter flexible y abierto a modificaciones. Se intenta

aportar un "sistema" de coordenadas para localizar problemas dentro del proceso de hacer Musicología. Se propone desde un principio formular un sistema tridimensional que nos permita decir dónde vive el concepto de la Música, y qué se conoce como Topografía de la Música. Las coordenadas son:

- 1) Realidad;
- 2) Comunicación;
- 3) Semiosis.

Veamos estas coordenadas con un poco más de detalle.

1) La realidad de la Música es física, psicológica y mental. En el nivel físico se trata de un fenómeno acústico, en tanto en su nivel mental se trata de la partitura como una abstracción. Como realidad psíquica, la Música expresa los estados emocionales de sus creadores y afecta emocionalmente al escucha.

2) La comunicación de la Música pasa por tres instancias: el nivel del creador, o lo que se conoce como la poiesis, seguido por el nivel neutral que es la obra en sí. El nivel estético del escucha es la instancia que percibe al ser interpretada una obra. Desde el momento en que una obra musical es creada, la existencia del creador es fija; en cambio, el número de escuchas e intérpretes crece constantemente.

3) Como la Música es uno de los sistemas no-lingüísticos más desarrollados de signos, la Semiosis juega un papel en la ubicación de su ontología. Se enfatiza que la Música no se interpreta como un tipo de lenguaje; al contrario, se señala que hay diferencias significativas entre un sistema musical y uno lingüístico. Sin embargo, se describe la Semiótica de la Música desde la perspectiva de la Semiología Estructuralista de Roland Barthes como una generalización de la teoría lingüística de Ferdinand de Saussure. Para no desviarnos del propósito de este esbozo, no podremos ahondar en este aspecto tan interesante. Sólo mencionaremos que un sistema es semiótico si se articula según

una estratificación fundamental de signos en su significante, significación y significado, donde el significante (los morfemas, o sea, la mínima forma significativa) llega a lo profundo del mensaje, el significado, por medio de las relaciones de la significación.

Todo lo anterior señala que una ubicación ontológica de la Música puede interpretarse como un punto en un cubo tridimensional generado por los ejes de realidad, comunicación y semiosis, cada uno, a su vez, articulado en tres valores:

realidad : física, psíquica, mental;  
comunicación : creador, obra, escucha;  
semiosis : significante, significación, significado

Así es, muy brevemente, como tenemos el cubo topográfico de la ontología musical, que consiste en un conjunto de  $3^3=27$  posibles ubicaciones topográficas como puntos. Pero cualquier objeto general puede ubicarse en cualquier subconjunto del cubo, y los 27 puntos son sólo ubicaciones elementales, a partir las cuales se componen ontologías más complejas.

Mazzola resume contundentemente lo expuesto: "Es equivocado creer que la Música es un asunto especial de la ciencia porque se trata de objetos que apuntan a un estrato no mental de la realidad. La Psicología, por ejemplo, estudia emociones, la Física estudia partículas elementales. Todos estos objetos comparten aspectos que trascienden la conceptualización humana. Pero podemos concebirlos en un sistema cognoscitivo y modelar su comportamiento con un éxito impresionante para nuestra capacidad de comprensión. La Música no es ni más ni menos accesible que la Física. Pero tenemos que establecer un sofisticado sistema de signos para poder aprehender su significado; el lenguaje común no es la herramienta para el espacio conceptual de la Música."

A fines del 2002 apareció publicado el más reciente libro de Guerino Mazzola, del cual tengo el honor de ser uno de los colaboradores. Podemos apreciar que el mismo título de la obra, "The Topos of Music", [ToM] posee un doble sentido. Por un lado está la palabra griega topos, que significa lugar y que sugiere la ubicación del concepto de la Música como un tópico, en el sentido de Aristóteles y Kant. Por otro lado, se hace referencia a la teoría matemática Topos que sirve para reflejar el sistema de signos musicales, esto es, la Música en su faceta de un sistema abstracto cuya estructura puede permanecer escondida sin un marco adecuado de comprensión. Este doble significado expresa, de hecho, la intención de unificar una profundización filosófica con la precisión de la Matemática, en torno a la Musicología. La Música está enraizada con realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero la descripción formal de las instancias musicales corresponde al formalismo matemático.

La Teoría Matemática de la Música está basada en las Teorías de Módulos y Categorías, en la Topología Algebraica y Combinatoria, en la Geometría Algebraica y Teoría de Representaciones, entre otras. Su propósito es el de describir las estructuras musicales. La filosofía detrás de ella es la de comprender los aspectos de la Música que están sujetos al raciocinio de la misma manera en que la Física puede hacerlo de los fenómenos propios del trabajo científico.

Esta teoría está basada: en un lenguaje adecuado para manejar los conceptos relevantes de las estructuras musicales, en un conjunto de postulados o teoremas con respecto a las estructuras musicales sujetas a las condiciones definidas y, en la funcionalidad para la composición y el análisis con o sin computadora.

Mazzola, en un magnífico artículo panorámico, "Towards Big Science" cita los elementos de Pierre Boulez de un programa de los años sesenta que tiene la intención de que las artes y la ciencia se reconcilien. (Yo diría que los artistas y los científicos). Con este postulado, la invocación de Boulez acerca de la "real imaginación"

solamente puede ser concebida mediante la realización virtual (esencial) del sistema complejo teórico y práctico de la Música, de sus sonidos y relaciones mediante la tecnología informática de hoy.

La Música es una creación central de la vida y pensamiento del ser humano. Que actúa en otra capa de la realidad que la Física. Creemos que el intento de comprender o de componer una obra de gran envergadura en la Música es tan importante y difícil como el intento de unificar la gravitación, el electromagnetismo, las fuerzas débiles y fuertes. De seguro, las ambiciones son comparables, y por lo tanto, las herramientas deben de ser comparables.

Mazzola concuerda con Boulez acerca de que "la Música no puede degenerar o reducirse a una sección de la Matemática: la Música está fundamentalmente enraizada con las realidades físicas, psicológicas y semióticas. Pero requerimos más métodos sofisticados además de los datos empíricos y estadísticos para describir formalmente las instancias musicales.

En los años ochenta, Mazzola observó que las estructuras musicales son estructuras globales pegadas con datos locales. Mazzola utilizó la selección de una cubierta como atlas, la cual es parte del punto de vista en el sentido de Yoneda y Adorno. Las cartas se llaman composiciones locales y consisten (vagamente) de subconjuntos finitos  $K$  de módulos  $M$  sobre un anillo  $R$ . Estas cartas  $K$  se pegan y comparan mediante isomorfismos de los módulos subyacentes. Tales objetos globales, los cuales generan diferentes categorías se llaman composiciones globales. Éstos son los conceptos estudiados en lo que ahora se conoce como la Teoría Matemática Clásica de la Música.



Guerino Mazzola y Emilio Lluis

Mazzola menciona tres paradigmas mayores de la Matemática y Musicología que han ocurrido durante los 150 años que han sido paralelos en la evolución de ambas y la creciente presencia de la Matemática en la Música. Estos son: las estructuras globales, las simetrías y la Filosofía de Yoneda.

La primera quiere decir, en palabras, que las estructuras localmente triviales se pueden juntar en configuraciones estéticas válidas si éstas se pegan de una manera no trivial.

La segunda, las simetrías y (los fractales) son utilizadas en la composición, aparecen también en la Naturaleza y en la Matemática juegan un papel crucial como también en la Física.

En cuanto a la tercera: la Filosofía de Yoneda, en palabras dice que, para comprender un objeto, de vueltas alrededor de él. Esto quiere decir, entendimiento mediante el cambio de perspectivas. En Matemática, este Lema de Yoneda tiene importantes aplicaciones en el Álgebra Homológica, en la Topología Algebraica y en Geometría Algebraica solamente para mencionar

algunas. Dice que un objeto matemático puede clasificarse salvo isomorfismo por su funtor. En Música, la partitura es solamente su primera vista y junto con todas sus interpretaciones constituyen su identidad. ¡Qué maravilloso punto de vista para ambos intérprete y audiencia! Deja de lado la estéril competencia fuera del arte y la ciencia (como si éstas fueran juegos olímpicos).

Recientemente, en su artículo "Status Quo 2000", (el cual hemos apreciado mucho que fuese presentado en México durante una exposición plenaria espléndida en Saltillo hace siete años), explica porqué el acercamiento mediante su modelo teórico geométrico de ese tiempo evolucionó a un marco que es apropiado para muchos problemas musicales. Este nuevo marco está basado en Matemática más sofisticada como la Teoría de Topos.

Abro un paréntesis para mencionar un poco acerca de la Teoría de Topos. Siguiendo la inmejorable y bella introducción de Mac Lane-Moerdijk de su libro sobre Gavillas en Geometría y Lógica [M-M], el aspecto más sobresaliente de la Teoría de Topos es el de unificar dos (aparente y completamente distantes) campos de la Matemática: por un lado la Topología y la Geometría Algebraica y por otro, la Lógica y la Teoría de Conjuntos.

Un topos puede considerarse como un "espacio generalizado" y a la vez como un "universo generalizado de conjuntos". Esto surgió en 1963 independientemente, de los trabajos de Grothendieck (reformulación de la Teoría de Gavillas para Geometría Algebraica), de Lawvere (en su búsqueda por axiomatizar la categoría de conjuntos), y de Paul Cohen (en el uso del "forcing" para nuevos modelos de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel).

Vagamente, una gavilla de grupos abelianos  $A$  sobre un espacio topológico  $X$  es una familia de grupos abelianos  $A_x$ , parametrizados por los puntos  $x$  en  $X$  de una manera "continua" adecuada.

Para Grothendieck, la Topología se convirtió en el estudio de (la cohomología de) gavillas, y las gavillas "situadas" en una topología de Grothendieck dada forman un topos, llamado "topos de Grothendieck". Las categorías (1945) y los funtores adjuntos (1957) entre ellas, son el lenguaje para entender la Teoría de Topos. Una referencia para los conceptos de categoría, funtor, transformación natural y de adjunto izquierdo es nuestro libro sobre Álgebra Homológica [LL1] y [LL1a].

Las categorías, inicialmente una manera adecuada para formular sucesiones exactas, la "caza de elementos en diagramas" y la homología axiomática para la topología, adquirieron vida independiente.

En 1963 Lawvere se propuso establecer un fundamento puramente categórico de toda la Matemática, comenzando con una axiomatización apropiada de la categoría de conjuntos, reemplazando el concepto de pertenencia con el de composición de funciones.

Casi al mismo tiempo, Tierney observó que el trabajo de Grothendieck podía conducir a una axiomatización del estudio de gavillas. Después, trabajando juntos lograron una axiomatización efectiva de las categorías de gavillas de conjuntos (y en particular de la categoría de conjuntos) vía una formulación apropiada de las propiedades del tipo de los conjuntos.

Así definieron, de una manera elemental, sin suposiciones acerca de los conjuntos, el concepto de topos elemental. La definición original se transformó en una axiomatización de una hermosa y asombrosa simplicidad: un topos elemental es una categoría con límites finitos, objetos función  $Y^X$  (definidos como adjuntos) para cualesquiera dos conjuntos  $X, Y$ , y un objeto potencia  $P(X)$  para cada objeto  $X$ ; se requieren que cumplan ciertas axiomas básicos. Invitamos al lector a adentrarse en este maravilloso tema en el libro [M-M].

Con respecto a la Interpretación, Mazzola comenta en sus artículos que, "la Música ha sido estudiada desde el punto de vista de la Estética y la Psico-Fisiología". Trabajó en desarrollar una Teoría de la Interpretación que describe las estructuras y procesos que definen una interpretación, "aquella que sin las herramientas adecuadas, la Teoría de la Interpretación permanecerá" (y me encanta esta frase) "como una rama de la Literatura en el espíritu de la Crítica Musical". Pero con esta posibilidad de exhibir variedades algebraicas gramaticales tiene una consecuencia profunda para el problema de la clasificación de interpretaciones. Así, el criticismo comparativo se convierte en un campo preciso de investigación y no más un sector de la literatura común.

Recientemente, Mazzola produjo una clasificación de objetos musicales, esto es, "existe un esquema algebraico cuyos puntos racionales representan ciertas clases de isomorfismo de composiciones globales". "Clasificar quiere decir la tarea de comprender totalmente un objeto. Esto es el Lema de Yoneda en su completa implicación filosófica". El comprender obras de arte quiere decir, sintetizar todas sus perspectivas interpretativas.

Veamos lo que es un Denotador de una manera informal. El material que expongo a continuación es tomado del libro de G. Mazzola [Mazz] y de la Tesis de Maestría de mi alumna Mariana Montiel [M] quien desarrolló y creó algunos aspectos de esta teoría en colaboración con G. Mazzola.

Un aspecto de motivación fundamental para el desarrollo del concepto matemático llamado Denotador, es la navegación, el cual esbozo brevemente a continuación.

El conocimiento consiste en dos elementos fundamentales: información y organización mental. La información sola, sin un sistema de "coordenadas" que permita ubicarla y recogerla cuando sea necesario, no es conocimiento. Por este motivo, el paradigma de la información puramente digital,  $\mathbf{Z}_2$ , ( $\{0,1\}$ , "off" y "on", etc.) nada tiene que ver con el conocimiento. Es así que se precisa de un

sistema de conceptos que provea un método completo de "navegación" y que funcione en un espacio de conceptos exhaustivo. El problema estriba en cómo realizar una arquitectura tal de conceptos sin perder rigor y confiabilidad. El Denotador pretende ser la solución a este planteamiento.

El espacio del conocimiento enciclopédico=Encicloespacio se plantea como la actualización del concepto tradicional de enciclopedia (del griego enkyklos paidea=enseñanza en círculo), originalmente desarrollado por Diderot y D'Alembert en el Siglo de las Luces. Con el advenimiento de la computadora personal, esta actualización exige un dinamismo en la estructuración de datos en el espacio-tiempo, en contraposición al contexto estático de antes, así como una relación interactiva con esta estructuración de información. Asimismo, el orden alfabético de la enciclopedia clásica, adecuada para sus volúmenes de textos, se generaliza a la orientación que impone la navegación (de "navigare" y este de "navis"=nave y "agere"=agitar, originalmente una actitud activa y no pasiva). En este sentido, el orden alfabético, adecuado para la enciclopedia de la sala, tiene que ser complementado por órdenes relacionados con presentaciones de datos que no son textos (espacios geométricos, colecciones de conjuntos, etc.).

La navegación tiene dos vertientes: navegación receptiva, más apegada a la enciclopedia clásica, en el que el enciclo-espacio no se modifica, y navegación productiva, donde hay interacción con el Encicloespacio y se agrega conocimiento al ya existente.

Hay tres características de la enciclopedia que son, realmente, principios de la tipología de formatos universales de datos: unidad, completez y discursividad. A cada uno de estos principios hay un aspecto que le corresponde al Denotador. La unidad en la creación de conceptos se realiza por medio de construcciones recursivas; la completez se logra por la ramificación extensiva de estas construcciones y la discursividad se tiene por la libre construcción y recombinación de denotadores. En contraposición a los sistemas

comunes de bases de datos, en el trabajo con denotadores no hay ningún conjunto fijo de posibles construcciones.

El concepto llamado “Denotador” permite describir los objetos musicales. Los Denotadores están concebidos de acuerdo con los criterios de navegación en el Encicloespacio y por lo tanto se usa la metodología de navegación, incluyendo la navegación matemática. La fundamentación filosófica de este concepto así como su formalización está fuera de los alcances de este artículo invitando al lector a leer el libro de Mazzola.

Existe la Teoría Enumerativa la cual es un acercamiento cuantitativo a la clasificación de composiciones locales vía acciones de grupos de permutaciones. El trabajo principal en esta área es de Harald Friperinger. Esta teoría trata de contar las órbitas de acciones de grupos finitos en conjuntos finitos. Estos conjuntos representan objetos particulares especiales, es decir, acordes, particiones de conjuntos de clase de notas o de altura, motivos, sucesiones de 12 notas etc. Los grupos consisten de transformaciones musicales interesantes tales como la transposición y la inversión.



Harald Friperinger y Emilio Lluís

Se tiene un teorema de H. Friepertinger donde muestra en particular las clases de 72-elementos  $2\ 230\ 741\ 522\ 540\ 743\ 033\ 415\ 296\ 821\ 609\ 381\ 912 = 2.23\dots(10)^{36}$  lo cual indica que todavía hay motivos para ser introducidos en la composición musical.

La música pertenece a los humanos y no aparece ya como una revelación de las divinidades de cualquier sabor. También, esta renovación se debe al inmenso arsenal de información y tecnología comunicativa donde la información se convierte en algo muy accesible y la carencia de precisión es de inmediato señalada. Esta situación da lugar a una nueva y fundamental manera de entender el conocimiento humano.

El conocimiento está actualizándose y extendiéndose constantemente y en el cual navegamos y experimentamos con un espíritu de espacio-tiempo dinámico. Ahora tenemos nuevos paradigmas en Musicología. Recordemos el experimento de Galileo acerca de la velocidad instantánea. Su acercamiento fue esencialmente bajo observación y medición y no en reflexiones abstractas especulativas. Su punto clave fue el de pasar del encapsulado especulativo de Oresme y los científicos medievales a accesibilidad "haciendo ciencia" con el método operacional: pensar haciendo. Este episodio tiene un análogo musicológico: velocidad en física con tiempo musical solamente que 500 años después.

Esto coloca a la Física y la Musicología en forma paralela donde hoy, músicos activos y matemáticos entre otros, están al borde de lo explícito dejando las especulaciones irrelevantes donde corresponde. Se están dejando atrás las últimas retóricas vacías. La revolución de Galileo fue la respuesta a la supuesta profundidad del discurso retórico.

Si consideramos los universos creados por el hombre tales como la Matemática y la Música podremos ver que el universo interno de ellas no es menos complicado e incontrolable que la naturaleza externa. Una pieza de naturaleza incontrolable, dada su riqueza de

creación tal como la increíble complejidad a partir de un germen que implica procesos combinatorios, estrategias de interpretación, estratificación semiótica, etc. como el Arte de la Fuga de Bach, no es fundamentalmente diferente de una supernova en el espacio interestelar. Estamos actualmente viviendo un cambio tan radical en la Musicología como el que se experimentó en la Física hace 500 años. ¡Es un momento maravilloso!

